Zinematika

Ion Errea

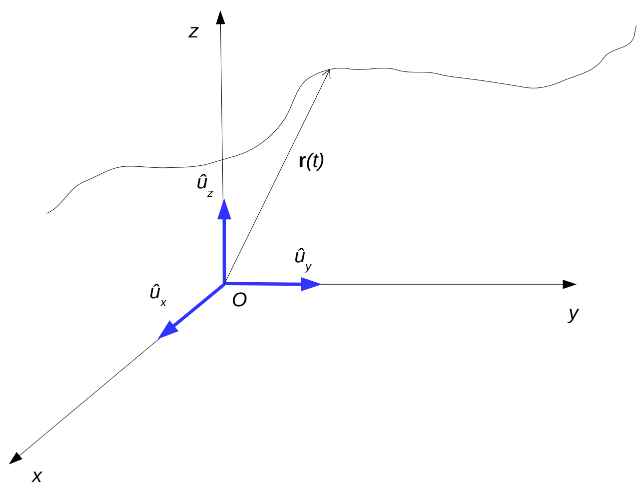
Gaien Aurkibidea

Erreferentziak

- *Física Universitaria* 13. edizioa. Sears eta Zemansky. Pearson:
  2. eta 3. kapitulua

- *Fisika zientzialari eta ingeniarientzat.* Fishbane, Gasiorowicz eta Thornton. UPV/EHU:
  2. eta 3. kapitulua

- *Fisika orokorra.* UEUko Fisika Saila. UEU:
  3. eta 4. kapituluak



Irudia 1: $\vec{r}(t)$ posizio-bektoreak deskribatzen duen ibilbidea.

1 Higidura lerromakur orokorra

Zinematikaren helburu orokorra puntu bat, zeinek partikula edo objektu bat irudika dezakeen, espazioan zehar nola mugitzen den deskribatzea da. Zinematikaren helburua deskriptiboa da, ez kausala. Zinematikak ez digu esaten zergatik mugitzen diren objektu edo partikulak, soilik nola. Aurrerago aztertuko dugun dinamikaren helburua da mugimenduaren zergatia aztertzea.

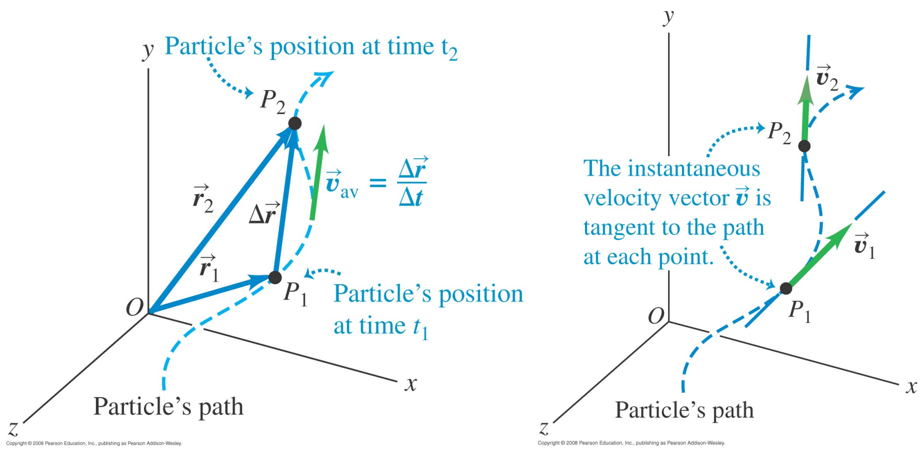
Puntu bat espazioan nola mugitzen ari den deskribatzeko posizio-bektorea denboraren funtzioan nola aldatzen den deskribatu behar dugu:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y + z(t)\hat{u}_z. \tag{1}$$

Posizio-bektorearen eboluzioak puntuaren ibilbidea deskribatzen du 1 irudian erakusten den bezala.

Ibilbidearen formula matematikoa jakin nahi badugu, hau da, ibilbidearen forma geometrikoa, denbora bakandu behar dugu. Honek, $f(x, y, z) = 0$ eta $g(x, y, z) = 0$ bi ekuazio emango dizkigu. Bakoitzak gainazal bat deskribatzen du. Geure puntuaren ibilbidea gainazal bi horien ebakidurak emango digu.

Ibilbidea plano batean gertatzen baldin bada, hots $z(t) = 0$ bada, ibilbidearen forma geometrikoa lortzeko nahikoa dugu denbora askatzea $x(t)$ eta $y(t)$ ekuazioetatik. Honek $f(x, y) = 0$ kurba bat emango digu, zeinek plano bateko ibilbide bat definitzen duen.



Irudia 2: $\vec{v}(t)$ abiadura-bektorearen kalkulu eta esangura geometrikoa.

1.1 Abiadura

Objektu baten ibilbidea nola aldatzen ari den deskribatzeko erabilgarria da posizio-bektorea denbora tarte batean zenbat aldatu den kalkulatzea. t_1 aldiunean objektua $\vec{r}(t_1)$ posizioan baldin bazegoen eta ondorengo t_2 aldiunean $\vec{r}(t_2)$ posizioan, denbora-tarte horretan objektuak izan duen batez besteko abiadura

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{2}$$

adierazpenak ematen digu. 2 irudian ikus daiteke geometrikoki nola kalkulatu daitekeen $\vec{v}_{av}$ bektorea.

Batez besteko abiadura-bektorea nulua izateak ez du esan nahi Δt denbora-tartean objektua geldi egon denik. Hots, demagun higidura zirkularra deskribatzen ari den objektua dugula eta biraketa periodo batean batez besteko abiadura-bektorea kalkulatu nahi dugula. T periodoa bira bat egiteko behar duen denbora denez, $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2 = t_1 + T)$. Honela, $\vec{v}_{av} = 0$ periodo baterako. Baina, jakin badakigu periodo batean objektua geldirik ez dela egon.

Batez besteko azkartasuna ordea eskalar bat da eta honela definitzen da:

$$v_{av}^{azk} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{3}$$

non Δs Δt denbora-tartean eginiko arku-luzera edo distantzia baiten. Adibdez, higidura zirkularraren aurreko adibidean T periodoan objektuak eginiko luzera $2\pi R$ da, R higidura zirkular horren erradio delarik. Beraz, batez besteko azkartasuna ez litzake nulua, $v_{av}^{azk} = 2\pi R/T$ baizik.

Δt denbora-tartea inifinituki txikia eginez, t aldiuneko abiadura kalkulatu daiteke:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}. \tag{4}$$

Hau, hain zuzen, posizio-bektorearen denborarekiko deribatua da, zein bektore bat den ere. 2 irudian erakusten den bezala, abiadura bektorea beti da ukitzailea edo tangentea ibilbidearekiko. Edozein une jakinean bektore-unitario tangentziala definitzen badugu

$$\hat{u}_t = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}, \tag{5}$$

abiadura bektorea

$$\vec{v}(t) = v(t)\hat{u}_t \tag{6}$$

bezala idatz dezakegu, non $v(t)$ abiadura-bektorearen modulua baiten. Noski, ibilbidea zuzena ez den heinean, bektore-unitario tangentziala denborarekin aldatuko da. $|\Delta\vec{r}|$-ren limite inifinitesimala Δs-ren limite infinitesimalaren berdina izango denez, hau da, ds, abiadura-bektorearen modulua ere kalkula daiteke distantziaren deribatu bezala. Hortaz,

$$v(t) = \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}. \tag{7}$$

Abiadura-bektorearen osagai kartesiarrak posizio-bektorea zuzenean deribatuz lortu ditzakegu:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z)}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz}{dt}\hat{u}_z. \tag{8}$$

Beste modu batera idatzita, $\vec{v} = v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y + v_z\hat{u}_z$, non

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{9}$$

Posizio-bektorea deribatuz abiadura lortu daitekeela ikusi dugu. Baina abiadura-bektorea jakinik, nola ezagutu dezakegu posizio-bektorea? Horretarako integral bat egin beharko dugu, deribatuaren alderantzizkoa:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt + \vec{r}_0, \tag{10}$$

non $\vec{r}_0 = x_0\hat{u}_x + y_0\hat{u}_y + z_0\hat{u}_z$ bektorea konstantea den. Pentsa (10) ekuazioa deribatzen badugu denborarekiko abiadura-bektorea berreskuratzen dugula. Osagai kartesiar bakoitzean ere adierazpen berdina beteko da:

$$x(t) = \int v_x(t)dt + x_0 \quad y(t) = \int v_y(t)dt + y_0 \quad z(t) = \int v_z(t)dt + z_0. \tag{11}$$

1.2 Azelerazioa

Higidura lerromakur orokorrean abiadura-bektorea denborarekin aldatuko da. Aldaketa hori da azelerazioa. Abiaduraren kasuan bezala batez besteko azelerazioa defini daiteke

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}, \tag{12}$$

non $\vec{v}(t_1)$ t_1 aldiuneko eta $\vec{v}(t_2)$ t_2 aldiuneko abiadurak baitiren. Denbora tartea infinitesimalki txikia eginez, aldiune bateko azelerazio abiaduraren deribatua dela ikusiko dugu:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}. \tag{13}$$

Azelerazio-bektorearen osagai kartesiarrak, $\vec{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z$, beraz,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \tag{14}$$

deribatuen bitartez kalkula daitezke. 1.1 atalean ikusi dugun bezala abiadura posizioaren deribatua denez (ikus (4) eta (9) ekuazioak), azelerazioa posizio-bektorearen bigarren deribatua da:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \tag{15}$$

eta

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{16}$$

Ekuazio hauen bidez posizio edo abiadura jakinik azelerazioa nola kalkulatu daitekeen ikus dezakegu. Nola jakin ditzakegu, ordea, abiadura eta posizioak azelerazioa badakigu? Horretarako berriro ere integral bat egin beharko dugu, abiadura azelerazioaren integrala baita:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt + \vec{v}_0, \tag{17}$$

zeinen osagai kartesiarrak

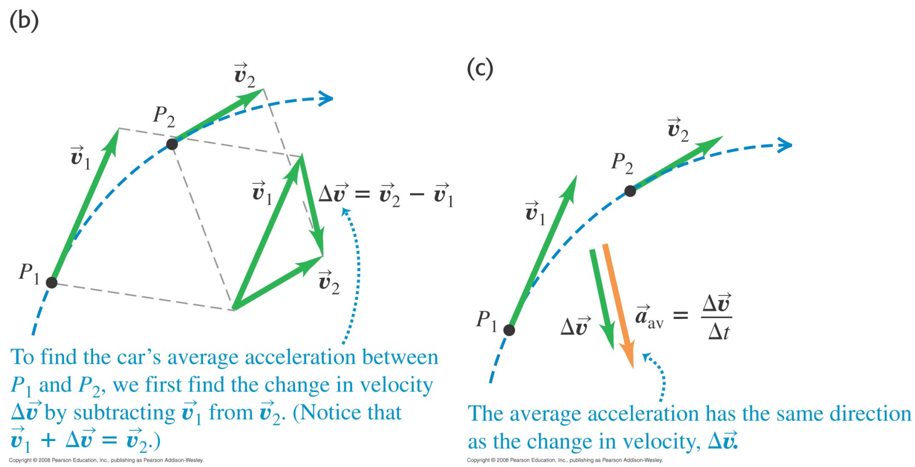
$$v_x(t) = \int a_x(t)dt + v_{x0} \quad v_y(t) = \int a_y(t)dt + v_{y0} \quad v_z(t) = \int a_z(t)dt + v_{z0} \tag{18}$$

$\vec{v}_0 = v_{x0}\hat{u}_x + v_{y0}\hat{u}_y + v_{z0}\hat{u}_z$ baitiren. bektore konstantea da, denboraren menpeko ez dena. Behin abiadura dugularik hau integratuz berriro ere (10) eta (11) ekuazioetan bezala posizio-bektorea lortu dezakegu.

Abiadura-bektorea ibilbidearekiko ukitzailea dela aipatu dugu arestian. Azter dezagun orain azelerazio-bektorea geometrikoki nola ulertu daitekeen. Batez besteko azelerazioaren norabide eta noranzkoa $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$ bektoreak zehaztuko du. 3 irudiak erakusten du horren adibide bat. Bestetik, aldiuneko azelerazioa $d\vec{v}(t)$ bektoreak zehaztuko du 4 irudian bezala. $d\vec{v}(t)$ bektorea $\Delta\vec{v}$-ren limite infinitesimala da.

Bi egoera izan ditzakegu:

- **Norabide aldaketarik ez dagoenean**, hau da, $\vec{v}(t)$ eta $d\vec{v}(t)$ paraleloak direnean, $\vec{a}(t)$ ere hauen norabidekoa izango da. Kasu honetan azelerazio-bektorea ukitzailea izango da ibilbidearekiko, abiadura bezala. Objektuaren abiaduraren modulua handitzen badoa $\vec{a}(t)$ eta $\vec{v}(t)$ bektoreek aldiune horretan noranzko berdina izango dute, baina abiaduraren modulua txikitzen badoa azelerazioak kontrako noranzkoa izango du.



Irudia 3: $\vec{a}_{av}(t)$ batez besteko azelerazio-bektorearen kalkulu eta esangura grafikoa.

- **Norabide aldaketa dagoenean**, hau da, $\vec{v}(t)$ eta $d\vec{v}(t)$ paraleloak ez direnean. Orduan, $\vec{a}(t)$ ez da abiaduraren norabidekoa izango, ezta ibilbidearekiko ukitzailea ere. Hau da 4 irudiko kasua. Irudian erakusten den bezala azelerazioak beti kurbaren alde ahurrerantzko norabidea du, kurbaren barrukalderantz.

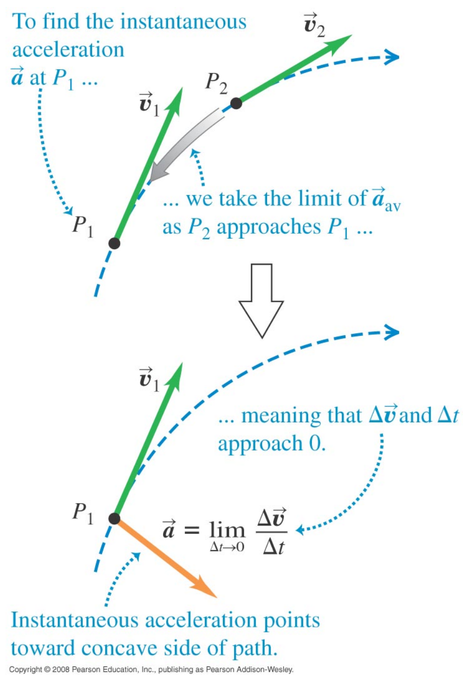
2 Kasu partikularrak

Aurreko ataleko higidura lerromakur orokorraren kasu partikular batzuk aztertuko ditugu ondoren.

2.1 Dimentsio bakarreko higidura

Higidura dimentsio bakarrean gertatzen baldin bada, onartu dezakegu posizio, abiadura eta azelerazio-bektoreen y eta z ardatzetako osagaiak nuluak direla: $y = z = v_y = v_x = a_y = a_z = 0$. Ondorioz, posizio, abiadura eta azelerazio-bektoreek osgai bakarra dutela kontsidera dezakegu, x ardatzeko osagaia hain zuzen. Higidura zuzena da. Dimentsio bakarreko higiduran beraz $\vec{v}(t)$ eta $d\vec{v}(t)$ paraleloak dira (x ardatzeko osagaia dute soilik) eta norabide aldaketarik ez da izango.

Noski $x(t)$, $v_x(t)$ eta $a_x(t)$ kurbek aurreko atalean azaldutako deribatu eta integralen bidezko harremana dute. 5 irudian ikus daiteke horren adibide bat.



Irudia 4: $\vec{a}(t)$ azelerazio-bektorearen kalkulu eta esangura grafikoa.

2.2 Higidura laua

Higidura laua dela diogu plano batean gertatzen denean. Hala denean beti aukeratu dezakegu erreferentzia-sistema bat non higidura $\hat{u}_x$ eta $\hat{u}_y$ bektore-unitarioek definitzen duten planoan gertatzen den, hau da, $z = 0$ planoan. Erreferentzia-sistema halakoa izanik, posizio, abiadura eta azelerazio-bektoreen z ardatzeko osagaia nulua izango da beti: $z = v_z = a_z = 0$.

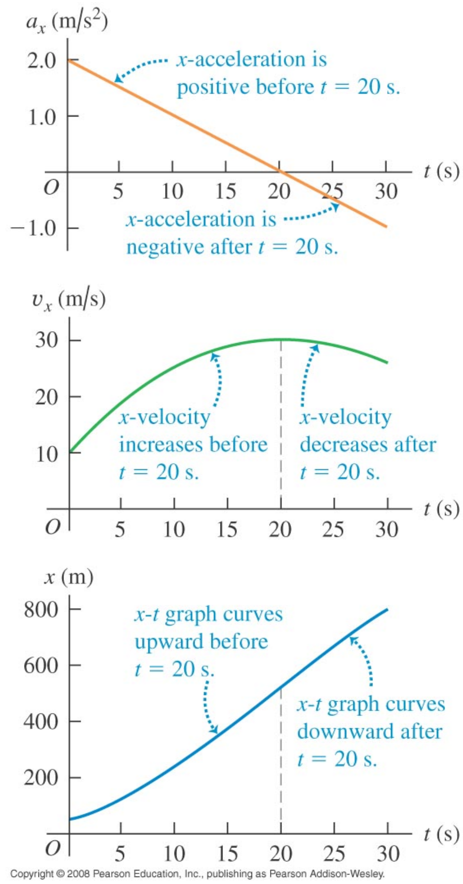
Higidura laua denean $\vec{v}(t)$ eta $d\vec{v}(t)$ bektoreak ez dira beti paraleloak eta higidurak ez du zuzena izan behar derrigor.

2.3 Uniformeki azeleratutako higidura

Azelerazio-bektorea konstantea denean, $\vec{a} = a_x\hat{u}_x + a_y\hat{u}_y + a_z\hat{u}_z = kte$, higidura uniformeki azeleratua dugu. Higidura gainera dimentsio bakarrekoa bada, hau da, zuzena, higidura zuzen uniformeki azeleratua (HZUA) dugu. (17) eta (10) ekuazioak erabiliz saia gaitezen kalkulatzen nolakoa izango diren abiadura eta posizio-bektoreak $\vec{a} = kte$ denean.

Azelerazioa konstantea denez eta (17) ekuazioa erabiliz:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}dt + \vec{v}_0 = \vec{a}t + \vec{v}_0. \tag{19}$$



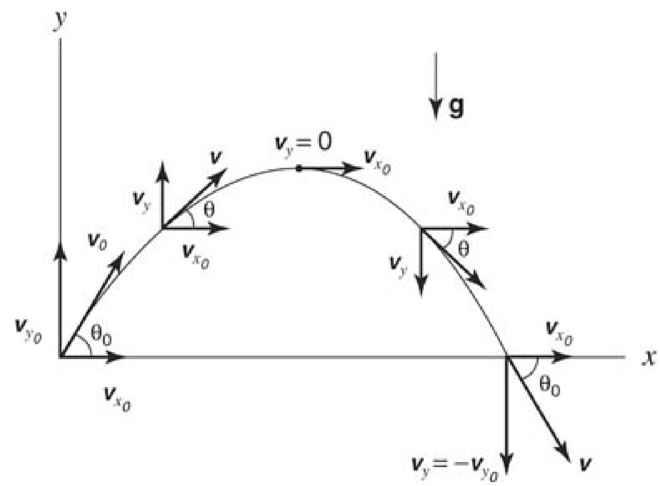
Irudia 5: Dimentsio bakarrean gertatzen den higiduraren posizioa, abiadura eta azelerazioa denboraren funtzioan.

Argi ikusten dugu beraz zein den arestian aurkeztutako $\vec{v}_0$ bektore-konstantearen esangura: $t = 0$ denean dugun abiadura da, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ delako. (19) ekuazioak esaten digu abiadura-bektorea linealki aldatuko dela denborarekin azelerazioa konstantea denean.

Abiaduraren denborarekiko menpekotasuna ezagututa posizio-bektorea kalkula dezakegu (10) erabiliz:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \int \vec{v}(t)dt + \vec{r}_0 = \int (\vec{a}t + \vec{v}_0)\, dt + \vec{r}_0. \\ \vec{r}(t) &= \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0. \qquad (20) \end{aligned}$$

Berriro ere argi geratzen da orain zein den $\vec{r}_0$ bektorearen esangura: $t = 0$ denean dugun posizioa, $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ delako. (20) ekuazioak erakusten digu posizio-bektorea koadratikoki (parabolikoki) aldatzen dela denborarekin.



Irudia 6: Dimentsio bakarrean gertatzen den higiduraren posizioa, abiadura eta azelerazioa denboraren funtzioan, non agerikoa den hauek deribatuen bidez duten lotura.

Uniformeki azeleratutako higiduraren ekuazioak osagaiz-osagai ere idatz ditzakegu:

$$v_x(t) = a_x t + v_{x0} \tag{21}$$
$$v_y(t) = a_y t + v_{y0} \tag{22}$$
$$v_z(t) = a_z t + v_{z0} \tag{23}$$

eta

$$x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{x0}t + x_0 \tag{24}$$
$$y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{y0}t + y_0 \tag{25}$$
$$z(t) = \frac{1}{2}a_z t^2 + v_{z0}t + z_0. \tag{26}$$

Esan genezake osgai kartesiar bakoitzean HZUA dugula.

2.4 Jaurtigaien higidura

Jaurtigaien higidura azelerazio konstanteko higiduraren adibide bat da, non konstantea den azelerazio grabitatea baiten. Jaurtigai baten higidura laua da, hau da plano batean gertatzen da. Hortaz, $z = 0$ planoan gertatzen dela onartuko dugu eta azelerazio-bektore konstantea $\vec{a} = -g\hat{u}_y$ izango da geure erreferentzia-sistema 6 irudian bezala kokatzen badugu. Lurrazaleko puntutik-puntura aldatzen bada ere, gutxi gorabehera $g = 9.8ms^{-2}$ da.

Jaurtigaiaren higidura nolakoa den zehazteko onar dezagun 6 irudian bezala higiduraren abiapuntua jatorria dela ($\vec{r}_0 = 0$) eta hasierako abiadura $\vec{v}_0 = v_{x0}\hat{u}_x + v_{y0}\hat{u}_y$ dela. Kasu honetan (23) eta (26) ekuazio orokorrek ondorengo itxura izango dute:

$$v_x(t) = v_{x0} \tag{27}$$

$$v_y(t) = -gt + v_{y0} \tag{28}$$

$$x(t) = v_{x0}t \tag{29}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t. \tag{30}$$

Hau da, x ardatzean jaurtigaiak bere abiadura mantenduko badu ere, y ardatzean HZUA dugu.

Higiduraren ibilbidea kalkulatu nahi badugu nahikoa dugu denbora askatzea (29) ekuaziotik eta (30) ekuazioan txertatzea. Honela,

$$y = -\frac{g}{2v_{x0}^2}x^2 + \frac{v_{y0}}{v_{x0}}x \tag{31}$$

ibilbidearen ekuazioa dugu. Ekuazio hau parabola ganbil bati dagokio. Beraz, jaurtigai batek ibilbide paraboliko ganbila deskribatzen du.

3 Azelerazioaren osagai tangentzial eta normalak

1.2 atalean azaldu dugunez, orokorrean $\vec{a}$ azelerazio-bektorea ibilbidearen alde ahurrerako norabidea du, hau da, ibilbideak deskribatzen duen kurbaren barrukalderantz. Azelerazio-bektorea abiadura-bektorearen denborarekiko deribatua bezala definitu dugunez, azelerazio ez-nulua izan daiteke abiaduraren modulua aldatzen delako edo bere norabidea aldatzen delako. Noski abiaduraren modulua eta norabidea denborarekin aldatzen badira ere azelerazio-bektorea ez-nulua izango da. Abiaduraren modulu eta norabide aldaketek azelerazio-bektorean duten eragina aztertzeko egokia da azelerazioaren osagai tangentzial eta normalak banatzea.

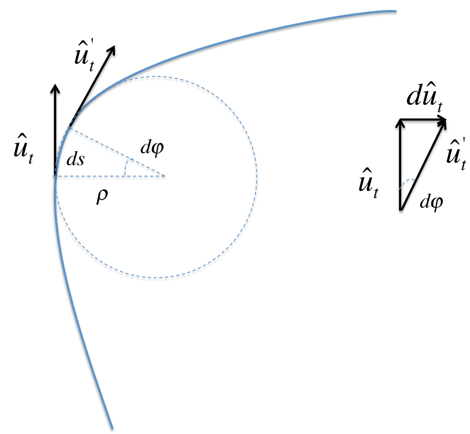
1.2 atalean azpimarratu dugunez, $d\vec{v}$ eta $\vec{v}$ bektoreak paraleloak direnean, azelerazioa ere euren norabidekoa izango da. Hortaz, azelerazioa $\hat{u}_t$ bektore-unitario tangentzialaren norabidekoa izango da: $\vec{a} = a\hat{u}_t$. Zehazkiago,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t \tag{32}$$

izango da. Hau da, azelerazio-bektorea tangentziala da eta soilik ez-nulua baldin eta abiaduraren modulua aldatzen bada.

Demagun orain, abiaduraren modulua konstantea dela, baina abiaduraren norabidea bai aldatzen dela. Kasu honetan,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{u}_t)}{dt} = v\frac{d\hat{u}_t}{dt} \tag{33}$$



Irudia 7: $d\hat{u}_t$ bektorearen kalkulua. $\hat{u}_t' = \hat{u}_t + d\hat{u}_t$ bektorea da, hau da, dt denbora pasa ostean dugun bektore-unitario tangentzial berria.

erlazioa izango dugu, non orain bektore-unitario tangentzialaren deribatua kalkulatu behar dugun.

Lehenik eta behin erraz ikus daiteke $\frac{d\hat{u}_t}{dt}$ bektorea eta $\hat{u}_t$ bektorea perpendikularrak direla. Izatez, $\hat{u}_t \cdot \hat{u}_t = 1$ adierazpena denborarekiko deribatuz

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} \cdot \hat{u}_t + \hat{u}_t \cdot \frac{d\hat{u}_t}{dt} = 0 \rightarrow \hat{u}_t \cdot \frac{d\hat{u}_t}{dt} = 0 \tag{34}$$

ikusi daiteke. Bi bektoreen arteko biderkadura eskalarra nulua denez, $\frac{d\hat{u}_t}{dt}$ bektorea eta $\hat{u}_t$ bektorea perpendikularrak dira. $\hat{u}_t$-ren norabide perpendikularra duen bektore unitarioari $\hat{u}_n$ bektore-unitario normala deritzo. $\hat{u}_n$ bektorea $\hat{u}_t$ eta $\frac{d\hat{u}_t}{dt}$ bektoreek osatzen duten planoan dagoela onartzen da eta bere noranzkoa kurbaren barrukalderakoa da, azelerazio-bektorearen norabide eta noranzkoa izan dezan.

$\frac{d\hat{u}_t}{dt}$ bektorearen norabidea zehaztu dugula, bere modulua zehaztu behar dugu orain. Lehenik ikus dezagun $d\hat{u}_t$ bektorearen modulua zein den. 7 irudian erakusten den bezala, $|d\hat{u}_t| = d\phi|\hat{u}_t| = d\phi$ izango da, non $d\phi$ angelua $\hat{u}_t$ eta $\hat{u}_t' = \hat{u}_t + d\hat{u}_t$ bektoreek osatzen duten angelua baiten (ikus 7 irudia). Angelu hau $d\phi = ds/\rho$ bezala ere kalkula daiteke, non ds dt denboran egindako ibilbidearen luzera eta ρ ibilbideak une horretan duen kurbadura-erradioa baitiren (ikus 7 irudia). Beraz,

$$\left|\frac{d\hat{u}_t}{dt}\right| = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}, \tag{35}$$

non (7) ekuazioa erabili dugun azkenengo berdintza lortzeko.

Beraz, abiaduraren modulua soilik aldatzen bada azelerazio-bektoreak bakarrik osagai normala izango du eta

$$\vec{a} = v\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_n \tag{36}$$

ekuazioak emango digu.

Egoera orokorrean, abiaduraren modulua eta norabidea aldatuko dira. Egoera honetan abiadura-bektorearen deribatua modu honetan kalkula dezakegu:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\frac{d\hat{u}_t}{dt}. \tag{37}$$

Aurretik $\frac{dv}{dt}$ eta $\frac{d\hat{u}_t}{dt}$ kalkulatu ditugunez, azelerazio-bektorea bere osagai tangentzial eta normalen bitartez idatzi dezakegu:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_n, \tag{38}$$

non

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t \tag{39}$$

azelerazio tangentziala baiten eta

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_n \tag{40}$$

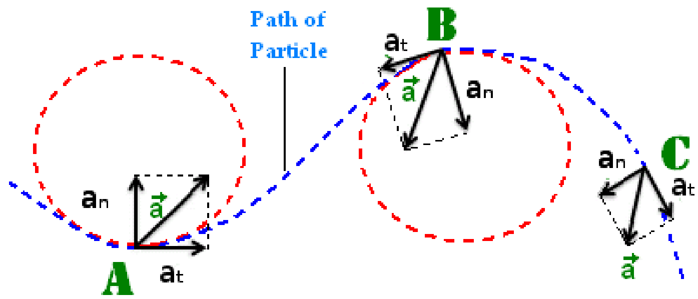
azelerazio normala. 8 irudian ibilbide bateko puntu desberdinetan azelerazio-bektorearen osagai normal eta tangentzialak erakusten dira

4 Higidura zirkularra

Higiduraren ibilbidea zirkunferentzia bat denean higidura zirkularra dugu. 9 irudian erakutsi bezala, higidura zirkularra plano batean gertatzen da eta nahikoa da posizio-bektoreak abzisa-ardatzarekin (x ardatzarekin) osatzen duen $\theta(t)$ angelua jakitea posizio-bektorea zehazteko. Izan ere,

$$\vec{r}(t) = R\cos\theta(t)\hat{u}_x + R\sin\theta(t)\hat{u}_y \tag{41}$$

izango da, R zirkunferentziaren erradioa izanik. Noski, $\theta(t)$ angelua denborarekin aldatuko da eta honek sortuko du posizio-bektoreak denborarekiko duen menpekotasuna. Higidura lerromakur orokorrean bezala, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ eta $\vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$ deribatuen bitartez kalkula ditzakegu abiadura eta azelerazio-bektoreak.



Irudia 8: Azelerazio-bektorearen $\vec{a}_t$ eta $\vec{a}_n$ osagaiak ibilbide bateko puntu desberdinetan.

Higidura zirkularrean abiadura-bektorea beti aldatuko da, bere norabidea etengabe aldatzen delako. Gogoan izan abiadura-bektorea ukitzailea dela beti ibilbidearekiko, hau da, higidura zirkularrean ukitzailea izango da zirkunferentziarekiko. Beraz, $\frac{d\vec{v}}{dt} \neq 0$ izango da beti eta higidura zirkularran azelerazio-bektorea ez-nulua izango da.

Azter dezagun lehenik nolakoa izango den abiaduraren moduluaren aldakuntza:

$$v = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt}. \tag{42}$$

Higidura zirkularra dugunean s arku-luzera eta θ angelua loturik daude

$$s = R\theta \tag{43}$$

adierazpenarekin. Nolabait aurreko ekuazio hau hartu daiteke angeluaren edo radian unitatearen definiziotzat. Adierazpen hau honela izanik, argi ikusten da s luzera zirkunferentziaren perimetroa ($2\pi R$) denean angelua 2π dela. Honela, abiaduraren moduluaren deribatua higidura zirkularrean

$$v = \frac{d(R\theta(t))}{dt} = R\frac{d\theta(t)}{dt} = R\omega(t), \tag{44}$$

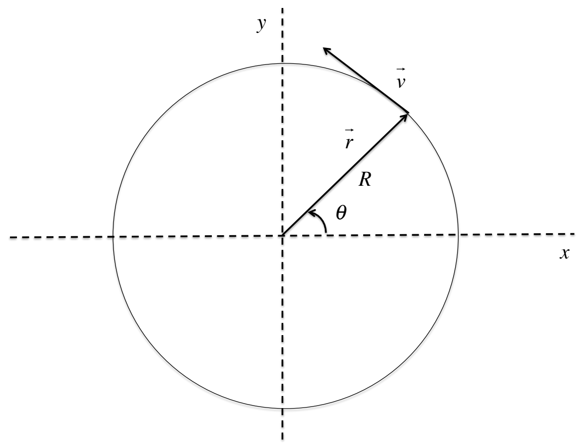
non abiadura angeluarra

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \tag{45}$$

bezala definitu dugun. Abiadura angeluarrak definitzen digu zein den angeluaren aldaketa denborarekiko. Abiadura angeluarra sistema internazionalean rad/s unitateetan neurtzen da.

Abiadura angeluarrak higidura zirkular orokor batean denborarekin aldatuko da. Abiadura angeluarraren denborarekiko aldakuntzak azelerazio angeluarra definitzen du:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}. \tag{46}$$



Irudia 9: Higidura zirkularrean posizio eta abiadura-bektoreak, eta angelua.

Beraz, angeluaren denborarekiko menpekotasuna ezagutzen badugu (45) eta (46) ekuazioekin abiadura eta azelerazio angeluarrak kalkula ditzakegu. Azelerazio angeluarra rad/s^2 unitateetan ematen da sistema internazionalean.

Alderantzizko problema ere plantea dezakegu. Hau da, $\alpha(t)$ azelerazio angeluarra ezagututa nola jakin dezakegu $\omega(t)$ eta $\theta(t)$ zeintzuk diren? (46) ekuazioak erakusten digu abiadura angeluarra azelerazio angeluarra integratuz lortu dezakegula:

$$\omega(t) = \int \alpha(t)dt + \omega_0, \tag{47}$$

non ω_0 konstantea den. Behin abiadura angeluarra ezagututa angeluaren denborarekiko menpekotasuna kalkula dezakegu (45) ekuazioaren alderantzizkoa hartuz:

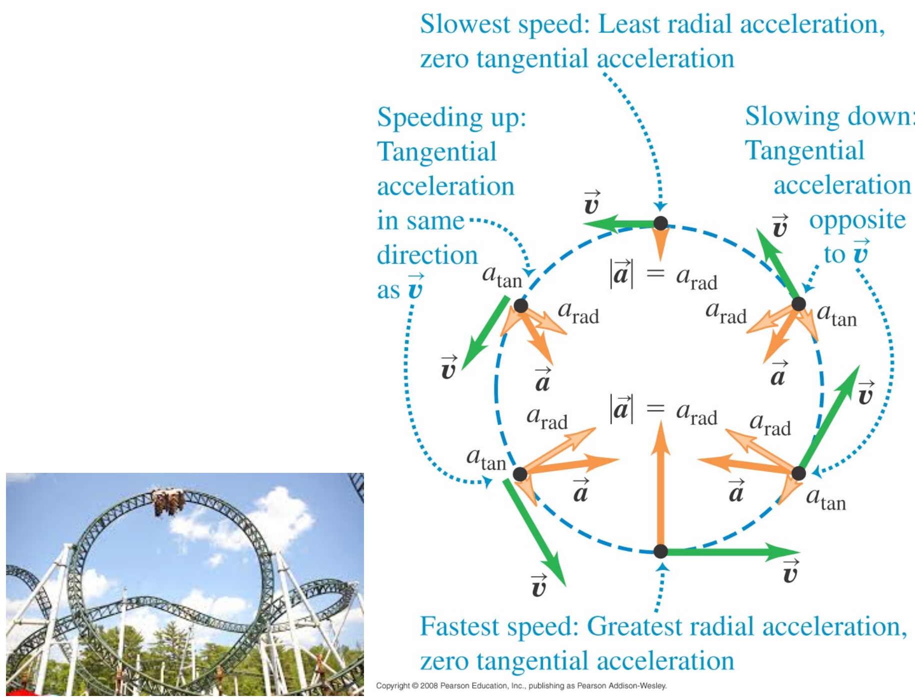
$$\theta(t) = \int \omega(t)dt + \theta_0, \tag{48}$$

non θ_0 konstantea den. Ekuazio integral hauen bitartez, beraz, angeluaren menpekotasuna kalkula daiteke azelerazio angeluarra ezagututa. Behin $\theta(t)$ ezaguna denean, posizio-bektorea kalkula daiteke (41) ekuazioa erabiliz.

4.1 Azelerazioaren osagai intrintsekoak higidura zirkularrean

Kalkula ditzagun azelerazio-bektorearen osagai tangentzial eta normalak higidura zirkularra denean. Azelerazio-bektorea higidura lerromakur orokorrean

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_n \tag{49}$$



Irudia 10: Errusiar mendi bateko bira zirkular batean $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{a}_t$ (irudian $\vec{a}_{tan}$) eta $\vec{a}_n$ (irudian $\vec{a}_{rad}$) bektoreak.

bezala idatzi dezakegu osagai intrintseko hauen batura bezala. Higidura zirkularra denean abiaduraren modulua $v = R\omega$ denez,

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha \tag{50}$$

moduan idatz daiteke azelerazioaren osagai tangentziala azelerazio angeluarraren funtzioan. Bestetik, ρ kurbadura-erradioa R erradioaren berdina izango da uneoro eta

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2 \tag{51}$$

izango da azelerazioan osagai normala. Azelerazio bektorea, beraz,

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = R\alpha\hat{u}_t + R\omega^2\hat{u}_n \tag{52}$$

izango da. Higidura zirkularra den kasu honetan, azelerazioaren osagai normalari, $\vec{a}_n = R\omega^2\hat{u}_n$, azelerazio zentripeto deitzen zaio ere.

Adibide moduan, 10 irudian erakusten da errusiar mendi bateko bira zirkular batean abiadura eta azelerazio-bektorea, zein bere osagai tangentzial eta normalak, nola aldatzen diren.

4.2 Kasu partikularrak

4.2.1 Higidura zirkular uniformea

Higidura zirkular uniformea dugula diogu azelerazio angeluarra nulua denean: $\alpha = 0$. Kasu honetan, (47) eta (48) ekuazioek erakusten dute abiadura angeluarra konstantea izango dela, $\omega = kte$, eta angelua

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0 \tag{53}$$

bezala linealki aldatuko dela denborarekin. θ_0 konstantea $t = 0$ aldiunean dugun angelua izango litzake beraz.

Higidura zirkular uniformean T periodoaren definizioa naturala da: higidura zirkularran dabilen puntuak itzuli bat egiteko behar duen denbora da periodoa. Periodo batean objektuak egingo duen arku-luzera $2\pi R$ denez, eta bere abiaduraren modulua ωR denez, periodoa

$$T = \frac{2\pi R}{\omega R} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{54}$$

izango da. Periodoaren alderantzizkoari maiztasuna deitzen diogu:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{55}$$

Maiztasuna sistema internazionalean hertz (Hz) unitateetan neurtzen da:

$$1Hz = 1s^{-1}. \tag{56}$$

Higidura zirkular uniformean azelerazioaren osagai tangentziala nulua izango da $\alpha = 0$ delako, baina azelerazio normala bai izango dugu. Hortaz, higidura zirkular uniformean azelerazio-bektorea normala da ibilbidearekiko, hau da, zirkunferentziaren zentroranzkoa da. Noski, abiaduraren moduluaren aldakuntzarik ez dagoeneko kasu partikular bat da higidura zirkularra.

4.2.2 Higidura zirkular uniformeki azeleratua

Higidura zirkular uniformeki azeleratua izango dugu azelerazio angeluarra konstantea denean, $\alpha = kte$. (47) eta (48) ekuazioen bitartez ikus dezakegu abiadura angeluarra eta angelua nola aldatzen diren denboraren funtzioan. Lehenik (47) ekuazioa erabiliz:

$$\omega(t) = \int \alpha dt + \omega_0 = \alpha t + \omega_0, \tag{57}$$

abiadura angeluarra denborarekin linealki aldatuko dela ikus dezakegu. Kasu honetan ω_0 konstantea $t = 0$ aldiuneko abiadura angeluarra da. Orain, (48) ekuazioaren bitartez,

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \int \omega(t)dt + \theta_0 = \int (\alpha t + \omega_0)\, dt + \theta_0 \\ \theta(t) &= \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \qquad (58) \end{aligned}$$

beteko dela ondoriozta dezakegu. Hots, angelua denboraren karratuarekin aldatuko da eta θ_0 $t = 0$ aldiunean dugun angelua da.

Higidura zirkular uniformeki azeleratuan $\alpha \neq 0$ denez, azelerazio angeluarra ez nulua denez, azelerazio-bektoreak osagai tangentzial eta normalak izango ditu. Beraz, ez du zentroranzko norabidea izango, ezta norabide ukitzailea ere.

5 Higidura erlatiboa

Higiduraren deskribapena behatzailearen araberakoa da. Hau da, puntu batean eta beste puntu batean dauden bi behatzailek ez dute orokorki objektu baten posizio, abiadura eta azelerazio berdinak ikusiko. Beste era batera esanda, erreferentzia sistema kartesiar baten jatorria (O) jarriko bagenu lehenengo behatzailearen posizioan eta bigarren baten jatorria (O') beste behatzailearen posizioan, posizio, abiadura eta azelerazio-bektoreak desberdinak izango dira orokorrean erreferentzia sistema bakoitzean.

5.1 Erreferentzia-sistema inertzialak

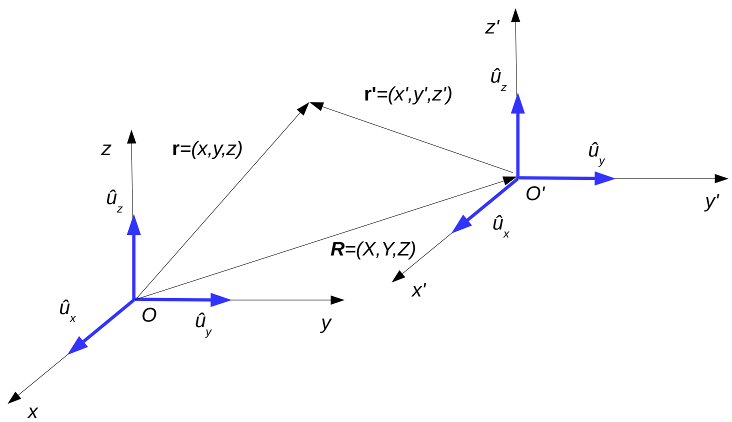
Erreferentzia-sistema bat inertziala dela esango dugu baldin eta bere jatorrian kokatua dagoen behatzaileak azeleraziorik pairatzen ez badu. Nahi adina erreferentzia-sistema inertzial definitu ditzakegu, baina euren artean abiadura konstantez aldendu behar dira horretarako, azeleraziorik gabe.

Eta zeintzuk dira erreferentzia-sistema inertzialen adibideak? Galdera horri erantzuna ematea ez da erraza, azken batean, unibertsoa azeleratzen ari denez unibertsoko bi puntu desberdin beti baitaude elkarren artean azeleratzen. Demagun, ordea, neurketa bat egin nahi duela behatzaile batek. Neurketa egin bitartean behatzaileak pairatu duen azelerazioa arbuiagarria bada, orduan bera jatorritzat duen erreferentzia-sistema inertziala dela kontsidera daiteke. Adibidez, demagun jaurtigai baten higidura deskribatu nahi dugula. Lurzoruan geldi dagoen behatzaile bat inertziala kontsidera dezakegu, baina ez jaurtigaiarekin batera doan behatzailea, hau grabitatearen eraginez azeleratuko baita.

5.2 Translazio-higidura erlatiboa

Demagun bi erreferentzia-sistema ditugula 11 irudian erakutsi moduan. Kontsidera dezagun lehenengo erreferentzia-sistema, behatzailea O jatorrian duena, inertziala dela, baina bigarrena ez, zeinen jatorria O' puntua baiten. Lehenengo erreferentzia-sistemaren ardatzak eta bektore unitario kartesiarrak x, y, z, $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ eta $\hat{u}_z$ izango dira. Bigarrenarenak, x', y', z', $\hat{u}'_x$, $\hat{u}'_y$ eta $\hat{u}'_z$. Suposatuko dugu O' jatorria O-rekiko soilik transladatu egiten dela, hau da, ez dagoela biraketarik euren artean. Ondorioz, bektore unitario kartesiarrak berdinak izango dira bi erreferentzia-sistemetan 11 irudian bezala: $\hat{u}_x = \hat{u}'_x$, $\hat{u}_y = \hat{u}'_y$ eta $\hat{u}_z = \hat{u}'_z$.

Azter dezagun zelako harremana izango duten O behatzaileak neurtzen dituen $\vec{r}$, $\vec{v}$ eta $\vec{a}$ posizio, abiadura eta azelerazio-bektoreen eta O' behatzaileak neurtzen dituen $\vec{r}'$, $\vec{v}'$ eta $\vec{a}'$ posizio, abiadura eta azelerazio-bektoreen artean.



Irudia 11: Translazio-higidura erlatiboa. Puntu baten posizio-bektorea $\vec{r}$ da O-n jatorria duen erreferemtzia-sisteman eta $\vec{r}'$ da O'-n jatorria duenean. $\vec{R}$ O puntutik O' puntura doan bektorea da, bi jatorriak lotzen dituen bektorea.

Lehenik eta behin, $\vec{R} = X\hat{u}_x + Y\hat{u}_y + Z\hat{u}_z$ bektorea baldin bada O' behatzailearen posizioa O-rekiko, $\vec{R} = \overrightarrow{OO'}$ (ikus 11 irudia), erraz ikus daiteke

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \tag{59}$$

beteko dela, non $\vec{r}$ puntu baten posizioa baiten O erreferentzia-sisteman eta $\vec{r}'$ puntu beraren posizioa O' erreferentzia-sisteman.

Abiaduren arteko erlazioa zehazteko (59) ekuazioa denborarekiko deribatu beharko dugu. $\vec{V} = d\vec{R}/dt$ baldin bada O' behatzaileak O behatzailearekiko duen abiadura eta $\vec{v}' = d\vec{r}'/dt$ puntuak O' erreferentzia-sisteman duen abiadura,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} + \vec{v}' \tag{60}$$

izango da erreferentzia-sistema desberdinetako abiaduren arteko erlazioa.

Antzera, azelerazioen arteko harremana (60) ekuazioa deribatuz lortuko dugu. $\vec{A} = d\vec{V}/dt$ baldin bada O' behatzaileak O behatzailearekiko duen azelerazioa eta $\vec{a}' = d\vec{v}'/dt$ puntuak O' erreferentzia-sisteman duen azelerazioa:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{A} + \vec{a}'. \tag{61}$$

Aurreko erlazioak osagai kartesiarretan ere idatz ditzakegu

$$\vec{R} = X\hat{u}_x + Y\hat{u}_y + Z\hat{u}_z \tag{62}$$

$$\vec{V} = V_x\hat{u}_x + V_y\hat{u}_y + V_z\hat{u}_z = \frac{dX}{dt}\hat{u}_x + \frac{dY}{dt}\hat{u}_y + \frac{dZ}{dt}\hat{u}_z \tag{63}$$

$$\vec{A} = A_x\hat{u}_x + A_y\hat{u}_y + A_z\hat{u}_z = \frac{dV_x}{dt}\hat{u}_x + \frac{dV_y}{dt}\hat{u}_y + \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2X}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2Y}{dt^2}\hat{u}_y + \frac{d^2Z}{dt^2}\hat{u}_z \tag{64}$$

betetzen dela kontuan izanik, (59), (60) eta (61) ekuazioak osagai kartesiarretan

$$x = X + x' \tag{65}$$
$$y = Y + y' \tag{66}$$
$$z = Z + z' \tag{67}$$
$$v_x = V_x + v'_x \tag{68}$$
$$v_y = V_y + v'_y \tag{69}$$
$$v_z = V_z + v'_z \tag{70}$$
$$a_x = A_x + a'_x \tag{71}$$
$$a_y = A_y + a'_y \tag{72}$$
$$a_z = A_z + a'_z \tag{73}$$

izango dira.

5.3 Galileoren transformazioak

Aurreko ataleko bi erreferentzia-sistemak inertzialak badira, euren arteko azeleraziorik ezin da egon. Hau da, $\vec{A} = 0$. Kasu honetan (59), (60) eta (61) ekuazioak honela sinplifikatzen dira:

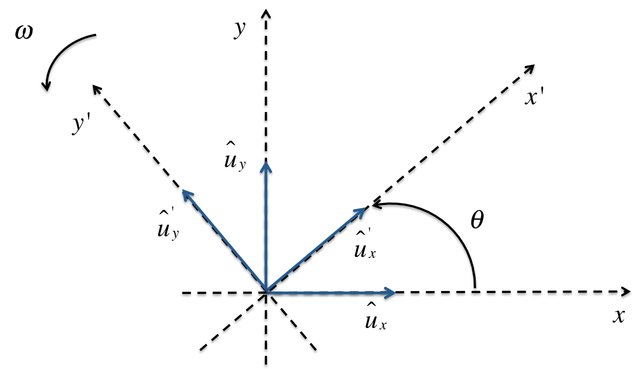
$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \tag{74}$$
$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' \tag{75}$$
$$\vec{a} = \vec{a}'. \tag{76}$$

Hauei Galileoren transformazio deritze.

Mezu garrantzitsua hemen zera da, azelerazioa beti berdina da edozein erreferentzia-sistema inertzialetan.

5.4 Biraketa uniformedun higidura erlatiboa

Suposa dezagun orain bi erreferentzia-sistema ditugula non translaziorik ez dagoen elkarren artean, baina O' jatorria O-rekiko biratzen baitagoen ω abiadura angeluar konstantez. Kalkuluak errazteko suposatuko dugu biraketa ardatza z ardatza dela 12 irudian erakusten den bezala eta higidura $z = 0$ planoan gertatzen dela.



Irudia 12: Biraketa uniformedun higidura erlatiboa. O' behatzailea ω abiadura angeluar konstantearekin biratzen ari da O behatzailearekiko.

Kasu honetan, jatorriak puntu berean daudenez,

$$\vec{r} = \vec{r}' \tag{77}$$

izango da, hau da,

$$x\hat{u}_x + y\hat{u}_y = x'\hat{u}'_x + y'\hat{u}'_y. \tag{78}$$

Bi erreferentzia-sistemen artean translazioa geneukanean bektore unitario kartesiarrak berdinak ziren, baina hori orain ez da egia. Gainera, 12 irudian erakusten den bezala, biratzen ari den O' erreferentzia-sistemako bektore unitarioak denborarekin aldatuko dira

$$\hat{u}'_x = \cos(\omega t)\hat{u}_x + \sin(\omega t)\hat{u}_y \tag{79}$$
$$\hat{u}'_y = -\sin(\omega t)\hat{u}_x + \cos(\omega t)\hat{u}_y \tag{80}$$

adierazpenak deskribatu bezala. Onartuko dugu $t = 0$ aldiunean bi erreferentzia-sistemak lerrokatutak daudela.

Abiadura lortzeko $\vec{r} = \vec{r}'$ adierazpena deribatuko dugu denborarekiko. Horretarako kontuan hartu beharko dugu $\hat{u}'_x$ eta $\hat{u}'_y$ bektoreak denborarekin aldatzen direla:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d\vec{r}'}{dt} && (81) \\ \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y &= \frac{dx'}{dt}\hat{u}'_x + \frac{dy'}{dt}\hat{u}'_y + x'\frac{d\hat{u}'_x}{dt} + y'\frac{d\hat{u}'_y}{dt} && (82) \end{aligned}$$

Bektore unitarioen denborarekiko menpekotasuna kontuan izanik,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y &= \frac{dx'}{dt}\hat{u}'_x + \frac{dy'}{dt}\hat{u}'_y + \omega\left[-x'\sin(\omega t) - y'\cos(\omega t)\right]\hat{u}_x \\ &+ \omega\left[x'\cos(\omega t) - y'\sin(\omega t)\right]\hat{u}_y && (83) \end{aligned}$$

berdintza froga daiteke. Noski, $\frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y = \vec{v}$ O behatzaileak neurtzen duen abiadura eta $\frac{dx'}{dt}\hat{u}'_x + \frac{dy'}{dt}\hat{u}'_y = \vec{v}'$ O' behatzaileak neurtzen duen abiadura dira. Abiadura angeluarra bektore bezala definitzen badugu adierazpena sinplifika daiteke. Horretarako abiadura angeluar bektorea biraketa ardatzaren norabidekoa hartzen da eta bere noranzkoa eskuin eskuko legeak esaten duena. Geure kasuan beraz

$$\vec{\omega} = \omega\hat{u}_z. \tag{84}$$

Hau honela izanik erraza da ikustea (83) berdintza honela berridatzi daitekeela:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \tag{85}$$

(85) adierazpen trinkoak asko errazten digu erreferentzia-sistemen arteko abiaduren erlazioa ulertzen. Demagun O' behatzaileak puntu bat geldi ikusten duela, hots, $\vec{r}' = R\hat{u}'_x$ posizioan. Hau da, $\vec{v}' = 0$. Ordea, O behatzaileak puntua R erradioko higidura zirkular uniformearekin ikusiko du. Zein da O behatzaileak neurtuko duen abiadura?

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \omega R(\hat{u}_z \times \hat{u}'_x) = \omega R\hat{u}'_y. \tag{86}$$

Hau da, ωR modulua duen bektorea eta ibilbidearekiko tangentea dena, higidura zirkular uniforme batean espero genuena hain zuzen.

Erreferentzia-sistema desberdinetako azelerazioen arteko harremana zehazteko, (83) ekuazioa deribatu beharko dugu denborarekiko. Kontuan hartuz $\frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{u}_y = \vec{a}$ O behatzaileak neurtzen duen azelerazioa eta $\frac{d^2x'}{dt^2}\hat{u}'_x + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{u}'_y = \vec{a}'$ O' behatzaileak neurtzen duen azelerazioa direla, froga daiteke

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \tag{87}$$

dela azelerazioen arteko erlazioa. $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ gaiari azelerazio zentripetu deritzo eta $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ gaiari Coriolis-en azelerazio.

Azelerazio zentripetuaren esangura ulertzeko demagun, lehen bezala, O' behatzaileak $\vec{r}' = R\hat{u}'_x$ posizioan geldi ($\vec{v}' = 0$) dagoen puntu bat ikusten duela. Kasu honetan kanpoko O behatzaileak

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \omega^2 R\hat{u}_z \times (\hat{u}_z \times \hat{u}'_x) = \omega^2 R(-\hat{u}'_x) \tag{88}$$

azelerazioa behatuko luke, hain zuzen, azelerazio normal baten adierazpena higidura zirkular uniformean. Horregatik deitzen zaio $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ gaiari azelerazio zentripetu, azelerazio normala ematen baitigu.

Coriolisen azelerazioaren esangura zein den ulertzeko suposa dezagun jatorritik gorputz bat abiadura konstantez abiatzen dela O erreferentzia-sistematik. Abiapuntuan $\vec{r}' = 0$ denez, $\vec{v} = \vec{v}'$ izango da (ikus (85) ekuazioa). O erreferentzia-sisteman azelerazioa nulua izango da, $\vec{a} = 0$, baina azeleraziorik neurtuko al du O' behatzaileak? Ikus dezagun abiapuntuan izango lukeen azelerazioa O' behatzailearen arabera:

$$\vec{a}' = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'. \tag{89}$$

Beraz O' behatzaileak azelerazio bat ikusiko du, zein $\vec{v}'$ bektorearen perpendikularra den eta, kasu honetan, ibilbidearen eskuin alderantz.

Geure adierazpenetan suposatu dugu biraketa z ardatzean dela, $\vec{\omega} = \omega\hat{u}_z$, eta desplazamendua $z = 0$ planoan gertatzen dela. Hala ere, esan behar da (85) eta (87) ekuazioak orokorrak direla eta kasu orokorrenean ere betetzen direla.