Partikula puntualaren dinamika

Ion Errea

Gaien Aurkibidea

Erreferentziak

- *Física Universitaria* 13. edizioa. Sears eta Zemansky. Pearson:
  4., 5., 6. eta 7. kapituluak

- *Fisika zientzialari eta ingeniarientzat.* Fishbane, Gasiorowicz eta Thornton. UPV/EHU:
  4., 5., 6, eta 7. kapituluak

- *Fisika orokorra.* UEUko Fisika Saila. UEU:
  5. eta 6. kapituluak

1 Sarrera

Dinamikaren helburua mugimendua zergatik gertatzen den azaltzea da. Partikula puntual bat badugu, dinamikak esango digu zein den bere azelerazioa. Azelerazioa dakigunean zinematikaren ekuazioak erabiliz mugimendua deskribatu ahalko dugu. Newtonen legeek esango digute (batez ere bigarrenak) zein den partikula baten azelerazioa.

2 Newtonen legeak

2.1 Inertzia, masa eta momentu lineala

Partikula baten inertzia partikulak bere abiadura-bektorearen aldakuntzaren (edo azelerazioaren) aurka duen erresistentzia bezala definitu dezakegu. Beste modu batera esanda, partikula batek inertzia handia duela esango dugu bere $\vec{v}$ abiadura mantentzeko joera handia duenean eta inertzia txikia duela diogu bere $\vec{v}$ abiadura erraz alda daitekenean.

Noski $\vec{v}$ abiaduraren modulua geroz eta handiagoa, orduan eta handiagoa izango da partikularen inertzia. Ordea, bi partikulek abiadura berdina izanik ere, abiadura aldaketari erresistentzia desberdina jarri diezaiokete. Beraz, partikulen propietate intrentseko bat dago inertziarekin lotuta. Hau da, hain zuzen ere gorputz baten m **masa**. Masa gorputz batek gorputz fisiko izateagatik abiadura-aldaketari dion erresistentzia da. Sistema internazionalean maka kg unitateetan neurtzen da, zein oinarrizko unitatea den.

Beraz, inertzia abiadurarekin zein masarekin dago lotuta.

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{1}$$

bektorea hartzen badugu, bektore hau bai izango dela partikularen inertzia kuantifikatzen duen magnitudea. $\vec{p}$ bektoreari **momentu lineala** deritzogu eta, esan bezala, $\vec{v}$ abiadura eta m masa duen partikula puntualaren inertzia neurtzen du.

2.2 Newtonen lehenengo legea

Newtonen lehenengo legeari inertziaren legea ere deritzo. Zera dio:

> *Partikula askeak bere abiadura (edo momentu lineala) mantenduko du erreferentzia-sistema inertzial batean*

Partikula bat askea izango da baldin eta ez badu elkarrekintzarik beste edozein partikularekin. Erreferentzia-sistemak inertziala izatea behar dugu, partikula askearen abiadura edo momentu lineala konstantea izango baita edozein erreferentzia-sistema inertzialean, baina ez inertziala ez den erreferentzia-sistema batean.

2.3 Newtonen bigarren legea

Inertziaren legeak zera iradokitzen du: partikula baten momentu lineala aldatzeko partikulak elkarrekintza bat jasan behar du. Elkarrekintza horri indar deritzogu. Beste era batera esanda, partikula puntual baten gainean indarren batek eragiten badu bere momentu lineala aldatuko da.

Indarra denbora-unitateko partikula batek duen momentu linealaren aldakuntza da:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{2}$$

Beraz, partikula baten momentu lineala aldatzeko $\vec{F}$ indarrak ez-nulua izan behar du. Partikula puntualaren m masa denborarekin aldatzen ez bada,

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}. \tag{3}$$

Hau da, Newtonen bigarren legearen enuntziatu ezagunena.

(3) ekuazioa dinamikaren oinarria da. Indarra ezagutzen badugu azelerazioa ezagutuko dugu, zeinek zinematika erabiliz $\vec{r}(t)$ posizio-bektorea kalkulatzea ahalbidetuko digun.

2.4 Gainezarpen-printzipioa

Partikula puntual baten gainean indar batek baino gehiagok eragin dezake. Hala denean, indar guztien baturari indar erresultante deritzo:

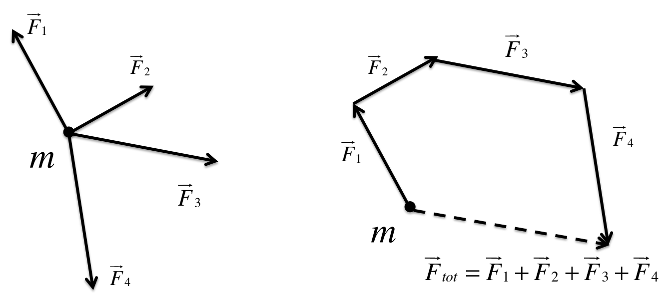
$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots , \tag{4}$$

non $\vec{F}_{tot}$ indar erresultantea den. 1 irudian erakusten da nola kalkulatzen den batura bektorial bezala $\vec{F}_{tot}$ indar erresultantea.

Gainezarpen-printzipioaren arabera Newtonen ekuazioa indar bat baino gehiago dituguneam

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = m\vec{a} \tag{5}$$

bezala aplikatzen da. Hau da, partikularen gaineko indar erresultanteak zehazten du zein izango den partikularen azelerazioa.



Irudia 1: m masaren gainean lau indarrek eragiten dute. Geometrikoki azaltzen da nola kalkulatzen den batura bektorial bezala $\vec{F}_{tot}$ indar erresultantea.

2.5 Newtonen hirugarren legea

Newtonen hirugarren legeari akzio-erreakzio legea esaten zaio ere. Honela dios-ku:

> *Bi partikula elkarri eragiten badiote, lehenak bigarrenaren gainean sortzen duen indarra, bigarrenak lehenaren gainean eragiten duen indarraren berdina da, baina aurkako noranzkoa du.*

$\vec{F}_{12}$ baldin bada 1 partikularen gainean 2 partikulak egiten duen indarra eta $\vec{F}_{21}$ 2 partikularen gainean 1 partikulak egiten duen indarra, Newtonen hirugarren legea hauxe da:

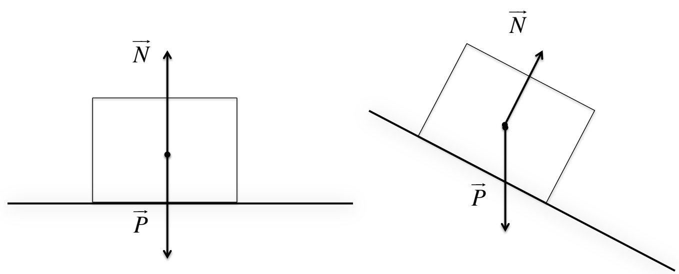
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{6}$$

3 Kontaktu eta urrutiko indarrak

Atal honetan ohikoak diren indar batzuk azalduko ditugu.

3.1 Pisua

Pisua lurraren eremu grabitatorioak edozein masan sortzen duen urrutiko in-darra da. Lurraren gainazalean eremu grabitatorioa $\vec{g}$ da, non $g = 9.8m/s^2$ eta bektorearen norabidea eta noranzkoa lurraren zentroranzkoa baiten. Beraz,



Irudia 2: Gorputz bati gainazal batek eragiten dion indar normala $\vec{N}$ gainazalarekiko perpendikularra da. Irudian $\vec{P}$ pisua ere irudikatuta dago.

edozein masa eremu grabitatorio honetan egoteagatik pairatzen duen indarra

$$\vec{P} = m\vec{g} \tag{7}$$

izango da.

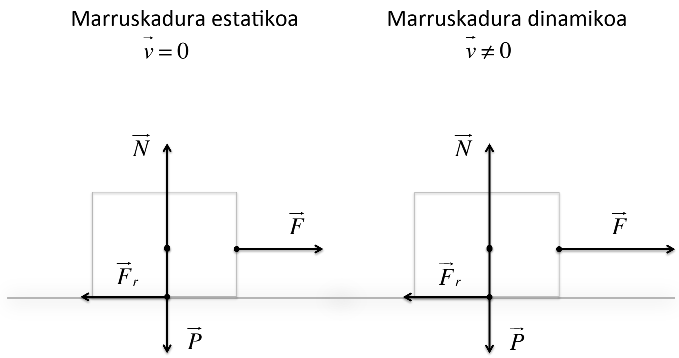
3.2 Indar normala

Indar normala kontaktu-indar bat da. Gorputz bat gainazal baten gainean bermatuta dagoenean, gainazalak indar bat ezartzen du gorputz honen gainean. Hori da indar normala. Indar hau gainazalarekiko perpendikularra da 2 irudian erakusten den bezala. Indar normala $\vec{N}$ bezala adierazi ohi da.

3.3 Marruskadura-indarra

Marruskadura-indarra ere beste kontaktu indar bat da eta gorputz bat gainazal baten gainean bermatuta dagoenean sortzen da, gorputzaren eta gainazalaren laztasunaren kausaz. Marruskadura indarrak ukipen gainazalarekiko norabide tangentziala du.

Marruskadura-indarrak gorputzen labaintze erlatiboaren kontra egiten du. Bere jatorria mikroskopikoa da eta, ondorioz, marruskadura indarraren balioa, esate baterako, materialen araberakoa eta hauen gainazalen tratamenduaren araberakoa izango da.



Irudia 3: Marruskadura estatikoa izango da gorputzaren eta gainazalaren artean abiadura erlatiboa nulua denean (ezker aldean bezala) edo dinamikoa gorputzaren eta gainazalaren artean abiadura erlatiboa nulua ez denean (eskuin aldean bezala).

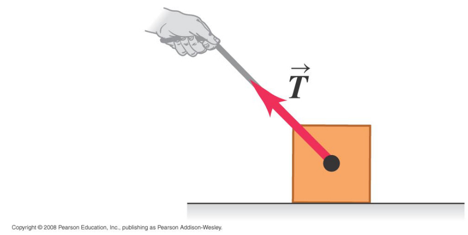
Marruskadura-indarra egon daiteke gorputzaren eta hau bermatuta dagoen gainazalaren artean abiadura erlatiborik ez badago ere 3 irudiko ezker aldean bezala. Kasu hauetan marruskadura-indarraren modulua

$$F_r \leq \mu_s N \tag{8}$$

izango da, eta bere norabidea labaintzea gerta daitekeen noranzkoak zehaztuko du. Beraz, marruskadura-indarraren modulua indar normalaren moduluarekiko zuzenki proportzionala da. Bestetik, marruskadura-indarra μ_s marruskadura-koefiziente estatikoarekiko ere zuzenki proportzionala da. Marruskadura-koefiziente hau kontaktuan dauden materialen propietateek zehaztuko dute.

(8) ekuazioak diosku $F_r = \mu_s N$ dela marruskadura estatikoak izan dezakeen balio maximoa. 3 irudiko ezker aldera itzuliz, suposa dezagun gorputza eskuin alderantz bultzatzen duen $\vec{F}$ indarra nulua dela. Orduan $\vec{F_r}$ ere nulua izango da gorputza geldi mantentzeko, bestela ezker aldera mugituko litzake espontaneoki eta hori ez da posible. $\vec{F}$ handitu ahala, $\vec{F_r}$ ere handituko da gorputza geldirik mantentzeko. Une bat iritsiko da, hau da $F_r = \mu_s N$ denean, non marruskadura estatikoa ez den gai izango gorputza geldirik mantentzeko eta, une horretatik aurrera, gorputza mugituko da bermatuta dagoen gainazalarekiko.

Mugimendua dagoenean gorputzaren eta hau bermatuta dagoen gainazalaren artean marruskadura indarra izan dezakegu ere. Kasu honetan marruskadura-



Irudia 4: $\vec{T}$ tentsio indarra soka edo lokarri baten bultzadak sortzen duen indarra da.

indar zinetikoa izango dugu. Marruskadura-indar zinetikoaren noranzkoa abiaduraren noranzkoaren aurkakoa izango da. Bere modulua

$$F_r = \mu_k N \tag{9}$$

adierazpenak emango digu, non μ_k marruskadura-koefiziente zinetikoa baiten. Berriro ere ikusten dugu marruskadura-indarraren modulua marruskadura-koefiziente zinetikoarekiko zein indar normalaren moduluarekiko zuzenki proportzionala izango dela.

Ohar moduan aipatu behar da marruskadura-koefiziente estatiko eta zinetikoak adimentsionalak direla.

3.4 Tentsioa

$\vec{T}$ tentsio-indarra soka edo lokarri baten bultzadak sortzen duen indarra da. Tentsio-indarraren norabidea sokarena izango da eta noranzkoa bultzadak zehazten duena, 4 irudian erakutsi bezala.

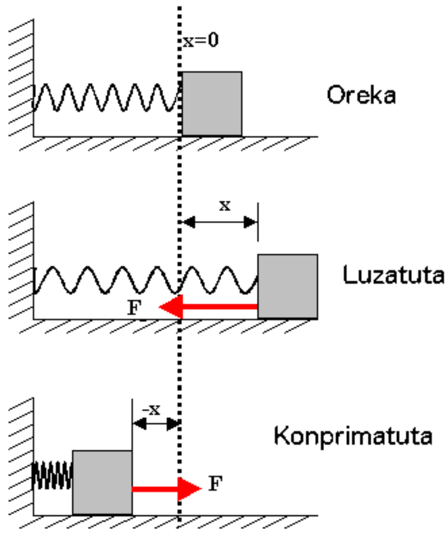
3.5 Indar elastikoa

Indar elastikoa deritzo malguki batek sortzen duen indarrari. 5 irudian erakuste den bezala malguki baten higidura dimentsio bakarrean gertatzen denez, suposa dezakegu malgukiaren desplazamenduak x ardatzean gertatzen direla. Malguki orok oreka egoera bat du. Suposa dezagun orekan malgukiaren elongazioa $x = 0$ dela. Malgukia elongatzen dugunean, ordea,

$$\vec{F} = -kx\hat{u}_x \tag{10}$$

indarra sortuko du malgukiak. Hau da, malgukia luzatuta dagoenean, $x > 0$ denean, indar elastikoa $-\hat{u}_x$ noranzkokoa izango da, eta malgukia konprimatuta dagoenean, $x < 0$ denean, indar elastikoa $\hat{u}_x$ noranzkokoa izango da. (10) ekuazioari Hooke-n legea deritzo.

k kontstanteari konstante berreskuratzailea deritzo eta N/m unitateetan neurtzen da sistema internazionalean. Konstante honek neurtzen du malgukiaren zurruntasuna.



Irudia 5: Malguki batean indar elastikoa orekan dagoenean, luzatuta dagoenean eta konprimatuta dagoenean.

4 Indarrak higidura zirkularrean

Zinematikako gaian adierazi genuen bezala, higidura zirkularrean beti azelerazioa dago. Izan ere uneoro ari baita aldatzen abiaduraren norabidea. Abiaduraren modulua aldatzen ez zenean, hau da, higidura zirkular uniformea genuenean ω abiadura angeluar konstantearekin,

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\hat{u}_n = \omega^2 R \hat{u}_n \tag{11}$$

dugu. Hots, azelerazioak soilik osagai normala du.

Newtonen $\vec{F} = m\vec{a}$ ekuazioak diosku, azelerazio bat izateko indar bat behar dugula. Hortaz, higidura zirkularrean indarra

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}_n = m\frac{v^2}{R}\hat{u}_n = m\omega^2 R \hat{u}_n \tag{12}$$

izango da. Beste modu batean adierazita, **indar normal bat behar dugu higidura zirkular bat izateko**. Indar normala esango diogu zirkuluaren zentrorantz zuzendutako indar horri, zein beharrezkoa den higidura zirkularra izateko.

5 Indarrak behatzaile ez-inertzialetan

Higidura erlatiboaren atalean aztertu genuenez, bi behatzaile inertzial baditugu, hots, O eta O' behatzaileak, biek azelerazio berdina neurtuko dute: $\vec{a} = \vec{a}'$.

Hortaz, m masa duen gorputzaren gainean O behatzaileak neurtuko duen indarra ($\vec{F} = m\vec{a}$) O' behatzaileak neurtuko duen indarraren ($\vec{F}' = m\vec{a}'$) berdina izango da.

O' behatzailea ez-inertziala bada $\vec{a} \neq \vec{a}'$ eta ondorioz $\vec{F} \neq \vec{F}'$ izango da. Hau da, behatzaile biek indar desberdinak behatuko dituzte.

O' behatzailea O-rekiko $\vec{A}$ azelerazioaz urruntzen bada biraketarik gabe, hau da, translazio-higidura erlatiboa dugunean,

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A} \tag{13}$$

izango da erreferentzia-sistema ez inertzialeko behatzaileak neurtuko duen azelerazioa. Hortaz,

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{A} \tag{14}$$

edo

$$\vec{F}' = \vec{F} - m\vec{A} \tag{15}$$

izango da erreferentzia-sistema ez inertzialean dugun indarra.

O' behatzailea O-rekiko $\vec{\omega}$ abiadura angeluar konstantez biratzen ari bada,

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \tag{16}$$

izango da behatzaile ez-inertzialak neurtuko duen azelerazioa. Beraz,

$$\vec{F}' = \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \tag{17}$$

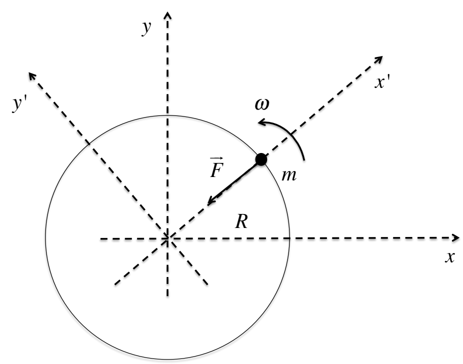
izango da erreferentzia-sistema ez inertzialean dugun indarra.

(15) eta (17) ekuazioek erakusten dutenez, erreferentzia-siztema ez-inertzialetan erreferentzia-sistema inertzialean ditugun $\vec{F}$ indarrez gain beste indar batzuk sortzen dira. Hots, translazio azeleratua dugunean $-m\vec{A}$ indarra, ω konstanteko biraketa dugunean $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ eta $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ indarrak. Erreferentzia-sistema ez-inertzialetan ditugun indar gehigarri hauei **indar irudikari** edo **inertzia-indar** deritze. Inertzia-indarrak ez dira benetazko indarrak, baina ezinbestekoak dira erreferentzia-sistema ez-inertzialeko behatzaileak higidura ongi deskribatzeko. $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ gaiari indar indar zentrifugo deritzo eta $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ gaiari Coriolis-en indar.

Indar irudikarien kontzeptua argitzeko kontsidera dezagun 6 irudiko adibidea. Bertan $\vec{F} = m\omega^2 R\hat{u}_n$ indar normalaren ondorioz higidura zirkular uniformean dugun m masa dugu. Higiduraren erradioa R da eta ω abiadura angeluarra. Hori da hain zuzen behatzaile inertzialak ikusten duena: $\vec{F}$ indar normalaren ondorioz m masa higidura zirkular uniformea deskribatzen ari da. Ordea O' behatzaile ez-inertzialak, zein m masarekin batera biratzen ari baiten, m masa geldi ikusten du $\vec{r}' = R\hat{u}'_x$ posizion. Hau da, berak neurtzen duen $\vec{a}'$ azelerazioak nulua izan behar du. Ikus dezagun zein izango litzakeen berak behatuko lukeen indarra:

$$\vec{F}' = \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = m\omega^2 R\hat{u}_n + m\omega^2 R\hat{u}_x = 0. \tag{18}$$

Izan ere, $\hat{u}_x = -\hat{u}_n$ da. $\vec{F}' = 0$ denez, $\vec{a}' = 0$ izango da. Adibide honek erakusten du behatzaile ez-inertzialak indar irudikarien beharra duela berak ikusten duen higidura deskribatzeko.



Irudia 6: $\vec{F}$ indar normalaren ondorioz m masa higidura zirkular uniformea deskribatzen ari da.

6 Momentu angeluarra eta indar momentua

Defini dezagun lehenik momentu angeluarra. Erreferentzia-sistema baten jatorria den O puntutik partikula batek duen $\vec{L}$ momentu angeluarra

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} \tag{19}$$

ekuazioak definitzen du.

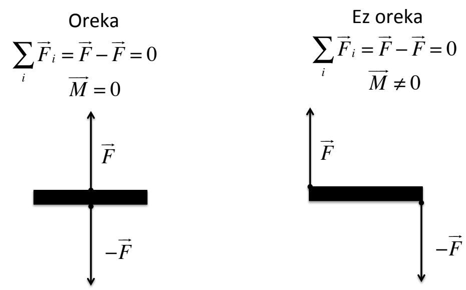
Ikusten dugunez posizio-bektorearen eta momentu linealaren arteko biderkadura bektoriala da momentu angeluarra. Biderkadura bektorial batek definitzen duenez, erraz ikusten da posizio-bektorea eta abiadura-bektorea paraleloak direnean momentu angeluarra nulua dela. Ondorioz, higidura zuzena bada beti egongo da erreferentzia sistema bat non $\vec{L} = 0$. Bestalde higidura kurbatua bada $\vec{L} \neq 0$ izango da. Izatez, eta hau argiago geldituko da solido zurrunaren dinamika aztertzen dugunean, momentu angeluarrak gorputz batek biratzeko duen inertzia neurtzen du nolabait.

Defini dezagun orain $\vec{M}$ indar-momentua. Erreferentzia-sistema baten jatorria den O puntutik neurtutako indar-momentua

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{20}$$

ekuazioak emango digu.

Estatikan indar momentua garrantzitsua da. Izan ere, gorputz bat geldi egoteko ez da nahikoa bere gaineko indar erresultantea $\sum_i \vec{F}_i$ nulua izatea, $\vec{M}$ indar-momentuak ere nulua izan behar du gorputz bat orekan egoteko. 7 irudiak erakusten du horren adibide bat. Izan ere, indar erresultantea nulua izanik $\vec{M} \neq 0$ bada, gorputzak biratzeko joera izango du.



Irudia 7: Gorputz bat orekan egoteko indar erresultanteak eta indar-momentuak nuluak izan behar dira.

Har dezagun orain momentu angeluarraren denborarekiko deribatua:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}. \tag{21}$$

Lehenengo gaia nulua da momentu lineala eta abiadura paraleloak direlako. Bigarren gaia indar-momentua da. Hortaz,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \tag{22}$$

berdintza dugu. Honi momentu angeluarraren teorema deritzo. Teorema honen esangura zera da, momentu angeluarra soilik aldatuko da indar-momentu bat badugu. Teorema hau ezinbestekoa izango zaigu solido zurrunaren dinamika ulertzeko.

Momentu angeluarraren teoremak zera momentu angeluarraren kontserbazio legera garamatza. Argi ikusten da (22) ekuazioan indar momentua nulua denean momentu angeluarra ez dela aldatuko eta, hortaz, hortaz momentu angeluarra kontserbatuko dela.

7 Indarren lana

Partikula baten desplazamenduan indar batek duen eragina aztertzeko definitzen dugu lana. Partikula baten gainean eragiten duen indar batek lan egingo du partikula desplazatzea lortzen badu. Ordea, ez du lanik egingo ez badu partikula desplazatzen.

Demagun $\vec{F}$ indarraren ondorioz dt denbora tartean partikula baten posiziobektorearen aldakuntza $d\vec{r}$ izan dela. Definizioz denbora tarte infinitesimal horretan indarrak egin duen lan infinitesimala

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{23}$$

izango da. Indar batek egingo duen lan osoa partikula bat A puntutik B puntura eramateko lan infinitesimalen baturak emango digu, hau da, bere integralak:

$$W_{A\to B} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{24}$$

Ikusten den bezala indar batek egiten duen lana kalkulatzeko $\vec{F}$ indarraren eta $d\vec{r}$ desplazamendu bektore infinitesimalaren arteko biderkadura eskalarra dugu:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F ds \cos\alpha, \tag{25}$$

non $ds = |d\vec{r}|$ ibilbidearen luzera infinitesimala baiten eta α $\vec{F}$ eta $d\vec{r}$ bekotreen arteko angelua. Indar batek lan egingo du beraz $\vec{F}$ eta $d\vec{r}$ perpendikularrak ez badira. Bi bektoreen arteko angelua zein den zehazteko komenigarria da gogoratzea $d\vec{r} = \vec{v}dt$ dela. Hortaz, $d\vec{r}$ eta $\vec{v}$ abiadura-bektorea paraleloak dira. Beste modu batera esanda, α angelua $\vec{F}$ indarraren eta partikula puntualaren $\vec{v}$ abiadura-bektorearen arteko angelua da. Honela, lana nulua izango da $\vec{F}$ eta $\vec{v}$ perpendikularrak direnean.

8 irudian bi adibide erakusten dira. Ezker aldeko irudian m masaren gainean $\vec{P}$ pisuak, $\vec{N}$ normalak eta $\vec{F}$ indarrak eragiten dute. Irudian erakusten den bezala pisua eta normala perpendikularrak direnez abiadurarekiko ez dute lanik egiten. Ordea $\vec{F}$ indarrak bai egingo du lan. $\vec{F} = F\cos\alpha\hat{u}_x + F\sin\alpha\hat{u}_y$ denez eta $d\vec{r} = dx\hat{u}_x$ partikula x ardatzean desplazatzen ari delako,

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F\cos\alpha dx. \tag{26}$$

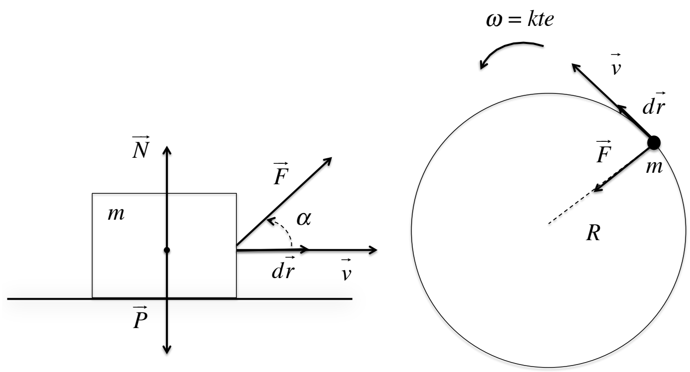
Indarra konstantea bada, gorputza A-tik B-ra eramateko $\vec{F}$-k egingo duen lana

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F\cos\alpha dx = F\cos\alpha(x_B - x_A). \tag{27}$$

$x_B - x_A$ indarraren ondorioz x ardatzean gorputzak izandako desplazamendua da.

8 irudiko eskuin aldean dugun adibidean higidura zirkular uniformea dugu. Gogoratu $\vec{F}$ indar normal bat beharrezkoa dela higidura zirkular uniformea izateko. Argi ikusten den bezala, $\vec{F}$ indar normala perpendikularra da abiadurabektorearekiko. Beraz, indar normalak ez du lanik egiten higidura zirkularrean.

Gorputz baten gainean indar batek baino gehiago eragiten duenean, hots, 8 irudiko ezker aldean bezala, indar bakoitzak egiten duen lana kalkula daiteke. Gorputzaren gainean egindako lan totala indar guztiek egindako lanen batura



Irudia 8: (Ezker aldea) m masaren gainean $\vec{P}$ pisuak, $\vec{N}$ normalak eta $\vec{F}$ indarrak eragiten dute, baina $\vec{F}$-k soilik egiten du lan. (Eskuin aldea) Higidura zirkular uniformea izateko behar dugun $\vec{F}$ indar normalak ez du lanik egiten.

izango da. Ordea, gainezarpen-printzipioagatik, lan totala indar erresultanteak egiten duen lanaren berdina da. Izan ere,

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}_{tot}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots\right)\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}_1\cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}_2\cdot d\vec{r} + \dots \tag{28}$$

Beraz, indar erresultanteak egiten duen lana kalkulatzea nahikoa da partikula baten gainean egindako lan totala ezagutzeko.

Sistema internazionalean lana Joule (J) unitateetan neurtzen da:

$$1J = 1N\ m = 1\frac{kg\ m^2}{s^2}. \tag{29}$$

8 Potentzia

Bi indarrek lan berdina egin dezakete, nahiz eta bakoitzak denbora desberdina behar izan lana burutzeko. Indar batek lan bat egiteko duen azkartasuna neurtzeko potentzia definitzen da.

Aldiuneko potentzia lanaren denborarekiko deribatua bezala definitzen da:

$$P = \frac{dW}{dt}. \tag{30}$$

Definizioz lan infinitesimala $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ denez,

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \tag{31}$$

Hau da, aldiuneko potentzia indarraren eta abiadura-bektorearen arteko biderkadura eskalarra da.

Denbora-tarte batean indar batek egin duen batez besteko potentzia $\langle P \rangle$ kalkulatzeko, t denbora-tarte horretan egindako lana zatitu beharko dugu denbora-tartearekiko:

$$\langle P \rangle = \frac{W}{t}. \tag{32}$$

Sistema internazionalean potentzia Watt (W) unitateetan neurtzen da:

$$1W = 1\frac{J}{s} = 1\frac{kg\ m^2}{s^3}. \tag{33}$$

9 Energia zinetikoa eta lana

Demagun indar bakarra dugula m masaren gainean. Kalkula dezagun beste modu batean indarrak egingo duen lana m masa A-tik B-ra eramateko, Newtonen bigarren legeko $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ ekuazioa erabiliz:

$$\begin{aligned} W_{A\to B} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_A^B m d\vec{v} \cdot \vec{v} = \int_A^B d\left(\frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \int_A^B d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \\ &= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2. \end{aligned} \tag{34}$$

Beraz, indar batek egin duen lana partikulari eragin dion abiaduraren moduluaren aldaketarekin lotuta dago.

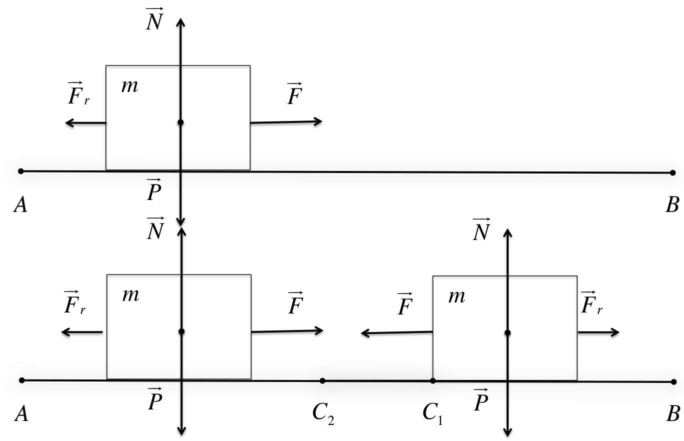
Aurreko emaitza ikusirik energia zinetikoa definitu dezakegu

$$E_z = \frac{1}{2}mv^2 \tag{35}$$

bezala. Energia zinetikoak nolabait gorputz batek masa eta abiadura izateagatik duen energia da eta sistema internazionalean Jouletan neurtzen da lana bezala. Erraz ikusten den bezala beraz, gorputz bat A-tik B-ra eramateko indarak egin behar duen lana energia zinetikoaren aldakuntzaren berdina da:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta E_z = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2. \tag{36}$$

Hortaz, **indar batek gorputzak duen abiaduraren modulua aldatzen ez badu ez du lanik egingo**.



Irudia 9: $\vec{F}$ eta $\vec{F}_r$ indarrek egingo duten lana aldatuko da A-tik B-ra zuzenean bagoaz edo $A \to C_1 \to C_2 \to B$ ibilbidea aukeratzen badugu.

Indar batek baino gehiagok eragiten dutenean m masa duen gorputzean gainezarpen-printzipioak diosku indar erresultantea izango dela masa bider azelerazioaren berdina: $\vec{F}_{tot} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$. Hortaz, kasu honetan indar erresultanteak eginiko lanaren berdina izango da gorputzaren energia zinetikoaren aldakuntza:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}_{tot} \cdot d\vec{r} = \Delta E_z = E_{zB} - E_{zA} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2. \qquad (37)$$

10 Indar kontserbakorrak eta energia potentziala

Orokorrean, m masa bat A-tik B-ra eramateko indar batek egingo duen lana ibilbidearen araberakoa izango da. Hots, har dezagun 9 irudiko adibidea. Bertan lan egingo duten indar bakarrak tira egiten duen $\vec{F}$ indarra eta $\vec{F}_r$ marruskadura-indarrak izango dira, zeintzuk konstanteak baitiren. Suposa dezagun A-tik B-ra zuzenean goazela. Orduan,

$$W_{A\to B}^{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = F(x_B - x_A) \qquad (38)$$

$$W_{A\to B}^{\vec{F}_r} = \int_A^B \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = -F_r(x_B - x_A) \qquad (39)$$

izango dira bi indar hauek egingo duten lana. Marruskadura-indarrak lan negatiboa egingo du kasu honetan, desplazamenduaren aurkako noranzko indarra delako. Demagun orain A-tik B-ra zuzenean joan beharrean $A \to C_1 \to C_2 \to B$ ibilbidea hartzen dugula, hau da, C_1 puntuan $\vec{F}$ indarraren noranzkoa aldatzen dugula C_2 punturaino eramanez gorputza eta bertara iritsi ondoren noranzkoa berriro aldatuz B punturaino daramagula. Kasu honetan hauek izango dira indarrek eginiko lanak:

$$\begin{aligned} W^{\vec{F}}_{A\to C_1\to C_2\to B} &= \int_A^{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_1}^{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ &= F(x_{C_1} - x_A) + F(x_{C_1} - x_{C_2}) + F(x_B - x_{C_2}) \\ &= F(x_B - x_A) + 2F(x_{C_2} - x_{C_1}) \qquad (40) \\ W^{\vec{F}_r}_{A\to C_1\to C_2\to B} &= \int_A^{C_1} \vec{F}_r\cdot d\vec{r} + \int_{C_1}^{C_2} \vec{F}_r\cdot d\vec{r} + \int_{C_2}^{B} \vec{F}_r\cdot d\vec{r} \\ &= -F_r(x_{C_1} - x_A) - F_r(x_{C_1} - x_{C_2}) - F_r(x_B - x_{C_2}) \\ &= -F_r(x_B - x_A) - 2F_r(x_{C_2} - x_{C_1}) \qquad (41) \end{aligned}$$

Ikusten dugunez

$$\begin{aligned} W^{\vec{F}}_{A\to B} &\neq W^{\vec{F}}_{A\to C_1\to C_2\to B} \\ W^{\vec{F}_r}_{A\to B} &\neq W^{\vec{F}_r}_{A\to C_1\to C_2\to B}, \end{aligned}$$

hau da, bai $\vec{F}$ zein $\vec{F}_r$ indarrek egiten duten lana A-tik B-ra joateko ibilbidearen araberakoa da. **Indar batek egiten duen lana ibilbidearen arabera aldatzen bada indar hori ez-kontserbakorra dela diogu**. Adibide honek erakusten du tira egiten duen indarra eta marruskadura ez direla indar kontserbakorrak.

Indar batek gorputz bat A-tik B-ra eramateko egiten duen lana ibilbidearen independentea bada indarra kontserbakorra dela diogu. Suposa dezagun une batez higidura dimentsio bakarrean dugula eta indarra $F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$ $E_p(x)$ funtzio baten deribatuaren bitartez kalkula dezakegula. Indar honek egingo duen lana gorputz bat A-tik B-ra eramateko

$$W_{A\to B} = \int_A^B F(x)dx = -\int_A^B \frac{dE_p}{dx}dx = -\int_A^B dE_p = -(E_p(x_B) - E_p(x_A)) \qquad (42)$$

izango da. Ikus daitekeenez indarrak egingo duen lana ez da ibilbidearen menpekoa izango, soilik $E_p(x)$ funtzioak ibilbidearen hasieran eta bukaeran dituen balioen araberakoa izango da ibilbidea edozein delarik ere. Beraz, dimentsio bakarrean indar bat kontserbakorra izateko $F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$ deribatu baten bidez adierazi behar da. $E_p(x)$ funtzioari energia potentziala deritzo.

Geure higidura dimentsio bakarrekoa ez bada, $\vec{F}$ indar kontserbakorra $E_p(x, y, z)$ energia potentzialetik kalkulatu ahalko da

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{u}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\hat{u}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\hat{u}_z\right) \qquad (43)$$

adierazpenaren bidez. Dimentsio bakarreko adibidean bezala, $\vec{F}$ indar kontserbakorrak egiten duen lana energia potentzialaren aldakuntzaren aurkakoa izango da:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}). \tag{44}$$

Ondorengo azpiataletan ikusiko ditugu kontserbakorrak diren bi indarri dagozkien energia potentzialen adierazpenak: pisua eta indar elastikoa.

10.1 Energia potentzial grabitatorioa

Pisua indar kontserbakorra da. Demagun y ardatza bertikalean kokatzen dugula eta honela pisua $\vec{P} = -mg\hat{u}_y$ izango da. Suposa dezagun geure partikula edozein norabidetan mugitzen dela, hau da, $d\vec{r} = dx\hat{u}_x + dy\hat{u}_y + dz\hat{u}_z$. Zein izango da pisuak egingo duen lana m masa A puntutik B puntura eramateko?

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{P}\cdot d\vec{r} = \int_A^B (-mg)dy = -(mgy_B - mgy_A) = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}). \tag{45}$$

Ikusten denez, ibilbidea edozein delarik ere, lanak A eta B puntuen altueraren (y_A eta y_B) menpekotasuna du soilik. Beraz, pisua indar kontserbakorra da eta pisuari atxikiriko energia potentziala

$$E_p = mgy \tag{46}$$

da. Izan ere,

$$\vec{P} = -\frac{\partial E_p}{\partial y}\hat{u}_y = -mg\hat{u}_y \tag{47}$$

baita.

10.2 Energia potentzial elastikoa

Malguki batean dugun indar elastikoa ere kontserbakorra da. Malgukia x ardatzean eta oreka posizio $x = 0$-n dugula suposatuz, $\vec{F} = -kx\hat{u}_x$ eta $d\vec{r} = dx\hat{u}_x$ izango dira. Hortaz, m masa A-tik B-ra eramateko indar elastikoak egingo duen lana

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B (-k)xdx = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right) = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) \tag{48}$$

izango da. Ikusten dugu, lanak soilik hasierako eta bukaerako posizioen menpekotasuna duela eta ibilbidearen independentea dela. Beraz, indar elastikoa kontserbakorra da. Erraz ikus daiteke ere energia potentzial elastikoa

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \tag{49}$$

izango dela. Izatez,

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{u}_x = -kx\hat{u}_x \tag{50}$$

da indar elastikoa.

11 Energia mekanikoaren kontserbazioa

Suposa dezagun orain m masako gorputzaren gainean $\vec{F}_{kon}$ indar kontserbakor batek soilik lan egiten duela, hots, pisuak edo indar elastikoak. Orduan, $\vec{F}_{kon}$ indar kontserbakorrak gorputza A-tik B-ra eramateko egin beharko duen lana (36) edo (44) ekuazioen bidez kalkulatu ahalko dugu:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}_{kon} \cdot d\vec{r} = \Delta E_z = E_{zB} - E_{zA} \tag{51}$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}_{kon} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}). \tag{52}$$

Bi ekuazioak berdinduz

$$E_{zB} - E_{zA} = -E_{pB} + E_{pA} \tag{53}$$

edo

$$E_{zA} + E_{pA} = E_{zB} + E_{pB}. \tag{54}$$

Energia mekanikoa energia zinetikoaren eta potentzialaren arteko batura bezala definitzen badugu, $E = E_z + E_p$, ikusten dugu

$$E_A = E_B \tag{55}$$

dela. Hau da, **gorputz batean indar kontserbakorrek eragiten badute energia mekanikoa kontserbatzen da**.

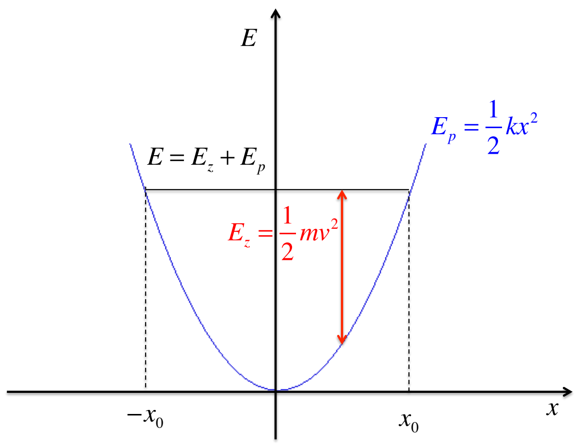
Gorputz batean indar kontserbakor batek baino gehiagok eragiten badu, bere energia potentzial totala energia potentzial desberdinen batura izango da. Hots, m masa bat malguki baten bitartez zintzilik badugu altuera batetik energia potentzial totala energia potentzial grabitatorioaren eta elastikoaren arteko batura izango da.

Energia mekanikoaren kontserbazio printzipioak energia potentzialaren interpretazio fisiko bat ematen digu. **Gorputz batek duen energia potentziala gorputz honek mugitzeko duen gaitasuna da**. Hau da, puntu zehatz batean egoteagatik energia potentziala duen gorputz batek energia potenzial hori energia zinetikoan bihurtu dezake bere abiadura handituz.

Azken honen adibide bat ikus dezakegu 10 irudian, non malguki baten eraginpean oszilatzen ari den m masa dugun. Hasiera batean suposa dezagun x_0 elongazioa eman zaiola eta bertatik askatu egin dela masa. Hasieran energia mekaniko osoa energia potentzialaren berdina izango da: $E = \frac{1}{2}kx_0^2$. Malgukia konprimitzen doan heinean, hots x puntuan dagoenean masa, energia potentzialaren parte bat energia zinetiko bihurtuko da

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \tag{56}$$

Oreka posiziotik pasatzen denean energia potentzialik ez dugu izango eta energia mekaniko guztia zinetikoa izango da: $E = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$. Energia mekanikoaren kontserbazioak beraz edozein aldiunetan dugun abiadura kalkulatzea ahalbidetzen digu.



Irudia 10: Energiaren kontserbazioa malguki baten eraginpean oszilatzen ari den m masaren kasuan.

12 Energia balantzea indar kontserbakorrak eta ez-kontserbakorrak ditugunean

Demagun orain $\vec{F}_{kon}$ indar kontserbakor batez gain $\vec{F}_{ez-kon}$ indar ez-kontserbakor bat ere dugula. Kasu honetan indar erresultantea $\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{kon} + \vec{F}_{ez-kon}$ izango denez, (37) ekuazioak diosku indar erresultanteak egingo duen lana energia zinetikoaren aldakuntzaren berdina izango dela:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}_{tot} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}_{kon} \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}_{ez-kon} \cdot d\vec{r} = \Delta E_z = E_{zB} - E_{zA}. \tag{57}$$

Bestalde, (44) ekuazioaren arabera, badakigu indar kontserbakorrak egingo duen lana

$$\int_A^B \vec{F}_{kon} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) \tag{58}$$

dela, hau da, energia potentzialaren aldakuntzaren aurkakoa dela. Beraz, ekuazio hau lortu dezakegu:

$$\Delta E = E_B - E_A = (E_{zB} + E_{pB}) - (E_{zA} + E_{pA}) = \int_A^B \vec{F}_{ez-kon} \cdot d\vec{r}. \tag{59}$$

(59) ekuazioak zera erakusten du, **energia mekanikoaren aldakuntza indar ez-kontserbakorrek egiten duten lanaren berdina da**. Gorputz baten gainean indar ez-kontserbakor batek baino gehiago baditugu (59) ekuazioko energia balantzea baliagarria izango da $\vec{F}_{ez-kon}$ indar ez-kontserbakor guztien batura baldin bada.