# Solido zurruna

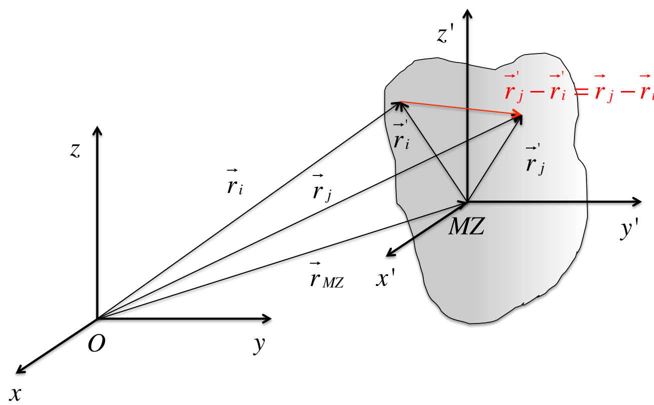
Ion Errea

## Gaien Aurkibidea



## Erreferentziak

- *Física Universitaria* 13. edizioa. Sears eta Zemansky. Pearson: 9. eta 10. kapituluak




Irudia 1: Solido zurrun bateko edozein bi punturen posizio-bektorea kanpoko eta masa-zentroko erreferentzia-sistemetan. Edozein bi punturen arteko distantzia konstante mantentzen da solido zurrun batean.

- *Fisika zientzialari eta ingeniarientzat.* Fishbane, Gasiorowicz eta Thornton. UPV/EHU:
  9. eta 10. kapituluak
- *Fisika orokorra.* UEUko Fisika Saila. UEU:
  8. eta 9. kapituluak

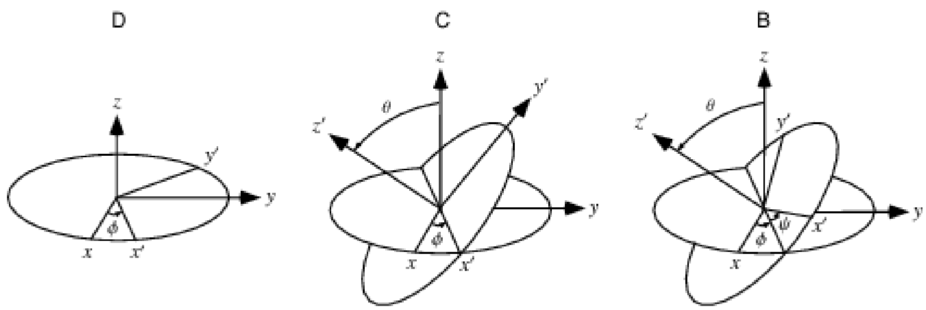
# 1 Definizioa

Solido zurruna partikula-sistema bat da. Hortaz, partikula-sistema bati dagozkion lege fisiko guztiak ere aplikatzen zaizkie solido zurrunei. Ordea, solido zurrun bat partikula-sistema berezi bat da, solidoa zurruna osatzen duten partikulen arteko ditantzia ez baita aldatzen. Horregatik deritzo zurruna.

1 irudian erakusten denez, solido zurrun bateko $i$ eta $j$ puntuen posizio-bektoreak $\vec{r}_i$ eta $\vec{r}_j$ baldin badira kanpoko erreferentzia-sistema batean eta $\vec{r}'_i$ eta $\vec{r}'_j$ masa-zentroaren erreferentzia-sisteman, bi puntuen arteko distantzia konstantea da, hau da,

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = |\vec{r}'_i - \vec{r}'_j| = kte. \tag{1}$$

Zurruntasun baldintza honek asko errazten digu solido zurrunaren deskriba-




Irudia 2: Euleren $\phi$, $\theta$ eta $\psi$ angeluak nahikoak dira solidoaren orientazioa zehazteko masa-zentroarekiko.

pena. Solido zurrunak duen forma ezagutzen badugu, horrek esan nahi du solido zurruneko puntu bat masa-zentroaren erreferentzia-sisteman non dagoen ezagutzen dugunean beste puntu guztiak masa-zentroaren erreferentzia-sisteman non dauden ere jakingo dugula. Horregatik, solido zurrun osoaren egoera edo posizioa zehazteko nahikoak dira 6 aldagai: masa zentroaren $\vec{r}_{MZ}$ posizio-bektorearen 3 osagai kartesiarrak eta solidoko puntu bakar baten $\vec{r}_i'$ posizio-bektorearen osagai kartesiarrak masa-zentroaren erreferentzia-sisteman. Nolabait $\vec{r}_{MZ}$-k esaten digu non dagoen solido zurruna eta $\vec{r}_i'$ posizio-bektoreak nola dagoen orientatuta solido zurruna masa-zentroarekiko.

Solido zurrunak masa zentroarekiko duen orientazioa zehazteko puntu baten $\vec{r}_i'$ posizio-bektorea adierazi beharrean 3 angelu eman ohi dira. Hauei Euler-en angelu deritze. 2 irudian erakusten da Euleren $\phi$ (prezesio-angelua), $\theta$ (nutazio-angelua) eta $\psi$ (biraketa propioaren angelua) angeluen esangura. Lehenik solidoa $z$ ardatzarekiko biratzen da $\phi$ angeluz. Ondoren, $x'$ ardatzarekiko $\theta$ angeluz. Azkenik, $z'$ ardatzarekiko $\psi$ angeluz. Euleren hiru angelu hauek guztiz zehaztu dezakete zein den solido zurrunaren orientazioa masa-zentroarekiko.

# 2 Solido zurrunaren zinematika: translazioa eta biraketa

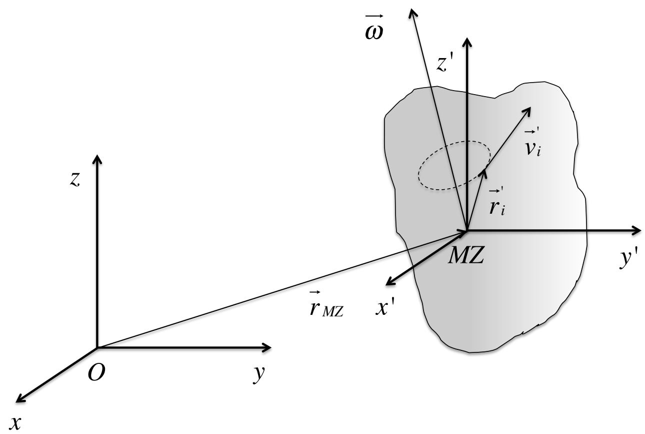
Solido zurruneko edozein punturen $\vec{r}_i$ posizio-bektorea kanpoko behatzaile batek ikusita honelaxe deskriba dezakegu:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{MZ} + \vec{r}_i'. \tag{2}$$

Adierazpen hau garbi islatzen da 1 irudian. Noski, adierazpen hau denborarekiko deribatuz lortuko dugu zein den kanpoko behatzaile batek eta masa-zentroko behatzaileak behatzen duten abiaduren arteko harremana:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{MZ} + \vec{v}_i', \tag{3}$$

non $\vec{v}_i$ kanpoko behatzaileak solidoko $i$ partikularentzako neurtuko duen abiadura den, $\vec{v}_{MZ}$ kanpoko behatzaileak masa-zentroarentzako neurtuko duen abia-




Irudia 3: Masa-zentroarekiko $\vec{\omega}$ abiadura angeluarraz biratzen ari den solido zurrunaren abiadura-bektorea masa-zentroaren erreferentzia-sisteman $\vec{v}_i' = \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$ da.

dura den eta $\vec{v}_i'$ $i$ partikularentzako masa-zentroko behatzaileak neurtuko duen abiadura.

Aztertu dezagun orain nolakoa izango den solido zurruneko partikulen abiadura bi kasu partikuletan, translazio hutsa eta biraketa hutsa dugunean.

## 2.1 Translazio hutsa

Translazio hutsa dugunean esan nahi dugu solido zurruna ez dagoela biratzen. Hau da, edozein $i$ punturen posizio-bektorea masa-zentroaren erreferentzia-sisteman konstantea dela, $\vec{r}_i' = kte$. Beste modu batera esanda, Euleren angeluak ez dira denborarekin aldatzen. Translazio hutsa dugunean beraz $\vec{v}_i' = 0$ eta solido zurruneko edozein puntuk masa-zentroaren abiadura izango du:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{MZ}. \tag{4}$$

## 2.2 Biraketa

Suposa dezagun orain translazioaz gain solido zurruna biratzen ari dela masa-zentroaren inguruan $\vec{\omega}$ abiadura angeluarraz. Abiadura angeluar bektorearen norabideak biraketa ardatza zehazten du eta bere noranzkoak, eskuin esku-ko legearen arabera, biraketaren noranzkoa zehazten du. Solidoa zurruna de-nez, solidoko edozein puntu ariko da $\vec{\omega}$ abiadura angeluarraz biratzen masa-zentroarekiko. 6 irudian iradokitzen den bezala, edozein punturen abiadura-bektorea masa-zentroaren erreferentzia-sisteman

$$\vec{v}_i' = \vec{\omega} \times \vec{r}_i' \tag{5}$$

izango da. Hori ulertzeko, pentsa edozein puntuk $r_i' \sin\alpha$ erradioko higidura zirkularra deskribatuko duela $\omega$ abiadura angeluarrarekin, $\alpha$ angelua $\vec{\omega}$ eta $\vec{r}_i'$ bektoreek osatzen duten angelua izanik. Ondorioz, solido zurruneko edozein $i$ punturen abiadura kanpoko erreferentzia-sistema batetik neurtuta

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{MZ} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i' \tag{6}$$

izango da.

# 3 Solido zurrunaren momentu angeluarra eta inertzia-tentsorea

Har dezagun masa-zentroarekiko $\vec{\omega}$ abiadura angeluarraz biratzen ari den solido zurruna. Solido zurruna partikula-sistema bat denez, bere momentu angeluarra

$$\vec{L} = \vec{L}_{MZ} + \vec{L}' = M\vec{r}_{MZ} \times \vec{v}_{MZ} + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_i' \tag{7}$$

moduan kalkula daiteke, non $\vec{L}_{MZ}$ masa-zentroaren momentu angeluarra den, $\vec{L}'$ masa-zentrotik neurtutako momentu angeluarra eta $M$ solido zurrunaren masa totala.

Ikus dezagun nola berridatz daitekeen $\vec{L}'$ (5) ekuazioa kontuan hartzen badugu:

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_i' = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i') = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[ r_i'^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i' \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i' \right], \tag{8}$$

non biderkadura bektorialaren

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \tag{9}$$

propietatea erabili baitugun. (8) ekuazio bektorialaren osagaiak honela idatz daitezke:

$$L_x' = \left[\sum_{i=1}^{n} m_i (r_i'^2 - x_i'^2)\right] \omega_x - \left[\sum_{i=1}^{n} m_i x_i' y_i'\right] \omega_y - \left[\sum_{i=1}^{n} m_i x_i' z_i'\right] \omega_z \tag{10}$$

$$L_y' = -\left[\sum_{i=1}^{n} m_i x_i' y_i'\right] \omega_x + \left[\sum_{i=1}^{n} m_i (r_i'^2 - y_i'^2)\right] \omega_y - \left[\sum_{i=1}^{n} m_i y_i' z_i'\right] \omega_z \tag{11}$$

$$L_z' = -\left[\sum_{i=1}^{n} m_i x_i' z_i'\right] \omega_x - \left[\sum_{i=1}^{n} m_i x_i' z_i'\right] \omega_y + \left[\sum_{i=1}^{n} m_i (r_i'^2 - z_i'^2)\right] \omega_z \tag{12}$$

Ekuazio hauek matrize eta bektore baten biderkadura bitartez berridatz daitezke:

$$\begin{pmatrix} L'_x \\ L'_y \\ L'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{13}$$

edo notazio matrizialean

$$\vec{L}' = I\vec{\omega}. \tag{14}$$

$I$ matrizeari inertzia-tentsorea deritzo. Matrize simetrikoa da eta bere osagaiak

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_{i=1}^{n} m_i(r_i'^2 - x_i'^2) \\ I_{yy} &= \sum_{i=1}^{n} m_i(r_i'^2 - y_i'^2) \\ I_{zz} &= \sum_{i=1}^{n} m_i(r_i'^2 - z_i'^2) \\ I_{xy} &= -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i' y_i' \\ I_{xz} &= -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i' z_i' \\ I_{yz} &= -\sum_{i=1}^{n} m_i y_i' z_i' \end{aligned}$$

dira. Inertzia-tentsorearen osagaiak solido zurrunaren forma geometrikoaren eta masa banaketaren araberakoak izango dira.

(14) ekuazioak erakusten digu solido zurrun baten masa-zentroarekiko momentu angeluarra inertzia-tentsoaren eta abiadura angeluarraren arteko matrize-biderkadura bezala kalkula daitekeela. Orokorrean, beraz, momentu angeluarra eta abiadura angeluarra ez dira bektore paraleloak izango. Hau solido zurrunaren ezaugarri berezi bat da. Ardatz baten inguruan biraketa uniformea deskribatzen duen partikula puntual bat bagenu momentu angeluar eta abiadura angeluar bektoreak paraleloak lirateke.

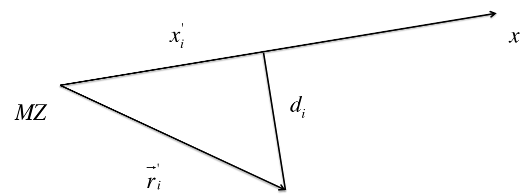
Inertzia-tentsorearen definizioa erabiliz, edozein erreferentzia-sisteman solido zurrunaren momentu angeluarra

$$\vec{L} = M\vec{r}_{MZ} \times \vec{v}_{MZ} + I\vec{\omega} \tag{15}$$

bezala kalkula daiteke.

# 4 Inertzia-ardatz nagusiak eta inertzia-momentuak

Orokorrean $\vec{L}'$ eta $\vec{\omega}$ bektoreak paraleloak ez badira ere, edozein solido zurrunean badaude gutxienez 3 ardatz berezi, elkarren artean perpendikularrak




Irudia 4: Inertzia-ardatz nagusi batetako inertzia-momentuaren kalkulua.

direnak. $\vec{\omega}$ bektorea adatz horietako baten paraleloa bada, orduan $\vec{L}'$ eta $\vec{\omega}$ bektoreak paraleloak izango dira. Ardatz berezi hauek **inertzia-ardatz nagusiak** dira.

Koka dezagun orain geure masa-zentroko erreferentzia-sistema inertzia-ardatz nagusiek definitutako triedroarekin bat eginez. Kasu honetan inertzia-tentsorearen diagonaletik kanpoko osagaiak nuluak egiten dira, hau da,

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}. \tag{16}$$

$I_x$, $I_y$ eta $I_z$ $x$, $y$ eta $z$ **inertzia-ardatz nagusietako inertzia-momentuak** dira. Orain, abiadura angeluarra inertzia-ardatz nagusietako bektore bat bada momentua angeluarra ere ardatz berekoa izango da:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{u}_x \quad \rightarrow \quad \vec{L}' = I_x \omega \hat{u}_x = I_x \vec{\omega} \tag{17}$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{u}_y \quad \rightarrow \quad \vec{L}' = I_y \omega \hat{u}_y = I_y \vec{\omega} \tag{18}$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{u}_z \quad \rightarrow \quad \vec{L}' = I_z \omega \hat{u}_z = I_z \vec{\omega}. \tag{19}$$

Ikus dezagun orain nola kalkulatzen diren inertzia-ardatz nagusietako inertzia-momentuak. Demagun $x$ ardatzeko inertzia-momentua nahi dugula:

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i'^2 - x_i'^2) \tag{20}$$

4 irudian erakusten den moduan $r_i'^2 - x_i'^2 = d_i^2$ da, non $d_i$ inertzia-ardatz nagusitik solido zurruneko $i$ puntura dagoen distantzia baiten. Beraz,

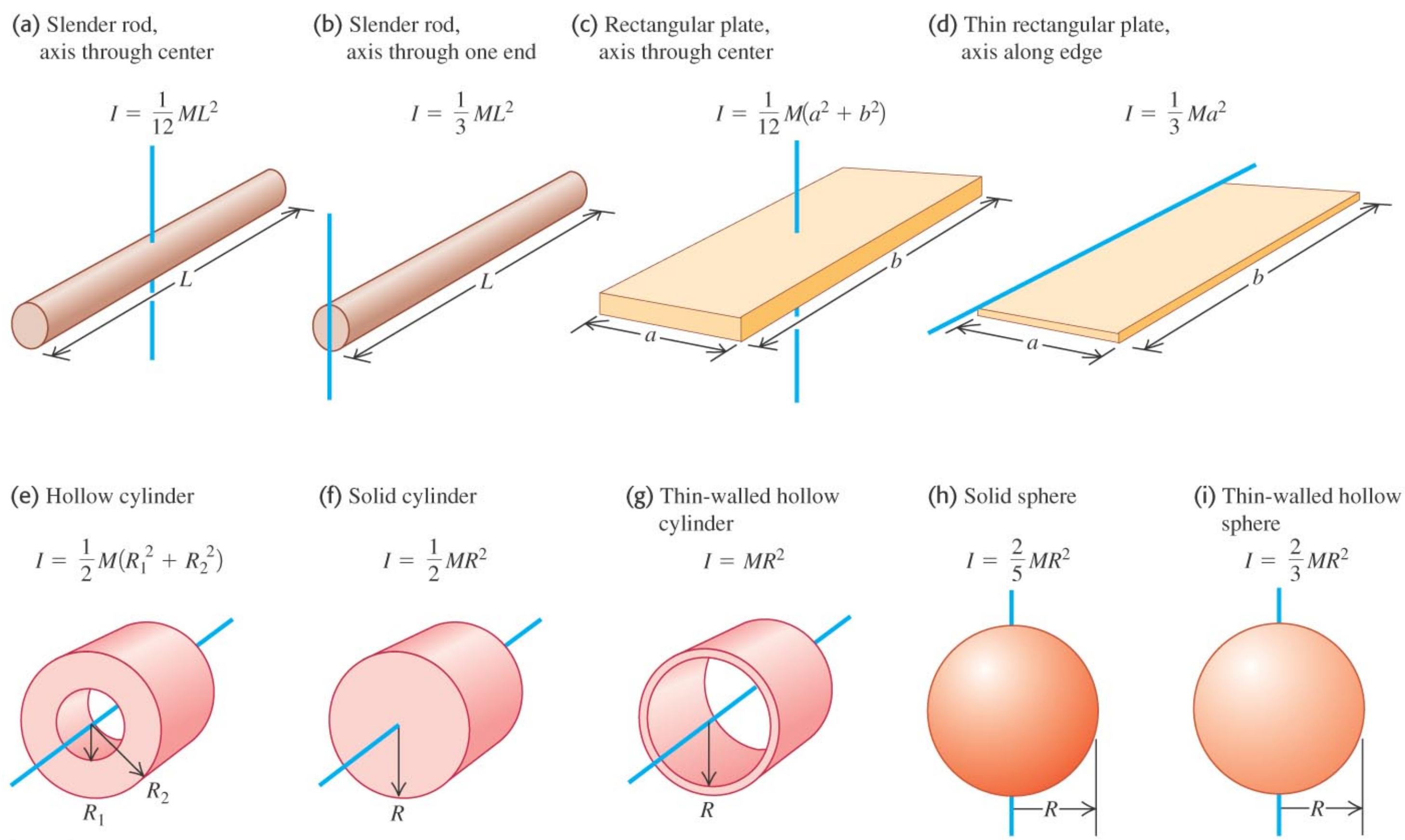
$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2. \tag{21}$$

Honek, noski, edozein ardatz nagusirako balio du eta ez soilik $x$ ardatzekorako.

Sarritan solido zurrun bat ez dago partikula puntualez osatutako, masa jarraia dute baizik. Kasu horietan (21) ekuazioko batura integral batean bihurtzen zaigu:

$$I_x = \int_M d^2 dm. \tag{22}$$

Integrala solido zurrun osora hedatu behar da. 5 irudian erakusten dira solido zurrun arrunt batzuen inertzia-momentuak.





Irudia 5: Solido zurrun desberdinen inertzia-momentuak.

# 5 Ardatz finko baten inguruko biraketa eta Steiner-en teorema

Orain arte beti suposatu dugu solido zurruna masa-zentrotik pasatzen den ardatz baten inguruan ari dela biratzen. Batzuetan, ordea, solido zurrunaren biraketa ez da gertatzen masa-zentrotik pasatzen den ardatz baten inguruan, beste ardatz finko baten inguruan baizik. $A$ ardatz finko hori paraleloa bada inertzia-ardatz nasusi batekiko solido zurrunaren momentu angeluarra erraz kalkula daiteke:

$$\vec{L} = I_A \vec{\omega}, \tag{23}$$

non $\vec{L}$ $A$ ardatz horretan jatorria duen erreferentzia-sistema batek neurtuko duen momentu angeluarra den, $\vec{\omega}$ momentu angeluar bektorea den eta $I_A$ $A$ ardatz horrekiko inertzia-momentua den. Inertzia-momentu hori

$$I_A = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2 \tag{24}$$

bezala kalkulatu daiteke partikula puntualez osatua badago sistema edo, masa jarraituko solido zurruna bada,

$$I_A = \int_M d^2 dm, \tag{25}$$

$d$ ardatzetik solidoko edozein puntura dagoen distantzia izanik.

Steineren teoremak asko errazten digu inertzia-ardatz nagusi batekiko paraleloa den edozein $A$ ardatz finko batekiko $I_A$ inertzia-momentua kalkulatzea. $A$ ardatzarekiko paraleloa den eta masa-zentrotik pasatzen den inertzia-ardatz nagusiko inertzia-momentua $I_{MZ}$ baldin bada,

$$I_A = I_{MZ} + Md^2 \tag{26}$$

izango $A$ ardatz finko horretako inertzia-momentua. (26) ekuazioan $M$ solido zurrunaren masa totala da eta $d$ masa-zentrotik pasatzen inertzia-ardatz nagusitik $A$ ardatzera dagoen distantzia.

# 6 Solido zurrunaren dinamikaren ekuazioak

Solido zurrunaren higidura nolakoa den zehaztu badugu ere, ez dugu oraindik aipatu zergatik higituko den solido zurrun bat. Hau da, solido zurrunaren zinematika aztertu dugu, ez dinamika.

Solido zurruna partikula-sistema bat denez, partikula-sistemaren dinamikaren ekuazioek zehaztuko dute ere solido zurrunaren dinamika. Alde batetik, erreferentzia-sistema inertzial batean, solido zurrunaren masa-zentroaren azelerazioak

$$\vec{F}_{kanpo} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{MZ} \tag{27}$$

ekuazioa beteko du, non $\vec{F}_{kanpo}$ kanpo-indar erresultantea, $\vec{P}$ solido zurrunaren momentu lineala eta $M$ solido zurrunaren masa totala baitiren. Solido zurrunaren $M$ masa denborarekin aldatzen ez dela suposatu dugu bertan. Bestetik, solido zurrunaren momentu angeluarra kanpo-indarrek egindako indar-momentuaren arabera aldatuko da

$$\vec{M}_{kanpo} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{28}$$

ekuazioak zehaztu bezala.

Solido zurrun batek erreferentzia-sistema inertzial batean duen momentu angeluarra

$$\vec{L} = M\vec{r}_{MZ} \times \vec{v}_{MZ} + I\vec{\omega} \tag{29}$$

denez, non $I$ inertzia-tentsorea baiten, ikus dezagun nolakoa den solido zurrunaren momentu angeluarraren denborarekiko deribatua:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(M\vec{r}_{MZ} \times \vec{v}_{MZ} + I\vec{\omega}\right) = M\frac{d\vec{r}_{MZ}}{dt} \times \vec{v}_{MZ} + M\vec{r}_{MZ} \times \frac{d\vec{v}_{MZ}}{dt} + I\frac{d\vec{\omega}}{dt} \\ &= M\vec{v}_{MZ} \times \vec{v}_{MZ} + M\vec{r}_{MZ} \times \vec{a}_{MZ} + I\vec{\alpha} = \vec{r}_{MZ} \times \vec{F}_{kanpo} + I\vec{\alpha}. \end{aligned} \tag{30}$$

Berdintza hau ondorioztatzeko masa-zentroaren azelerazioa (27) ekuazioak ematen digula erabili dugu eta, bestetik, azelerazio-angeluar bektorea

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{31}$$

abiadura-angeluar bektorearen denborarekiko deribatua dela. $\vec{\alpha}$ bektoreak $\vec{\omega}$ bektorearen norabidea du, hau da, biraketa ardatzaren norabidea, bere noranzkoa $\vec{\omega}$-ren berdina izango da abiadura angeluarra handitzen bada eta kontrakoa txikitzen bada, eta bere modulua azelerazio angeluarraren berdina izango da.

Laburbilduz, solido zurrunaren dinamika erreferentzia-sistema inertzial batean ondorengo bi ekuazioek zehaztuko dute:

$$\vec{F}_{kanpo} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{MZ} \tag{32}$$

$$\vec{M}_{kanpo} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_{MZ} \times \vec{F}_{kanpo} + I\vec{\alpha}. \tag{33}$$

Bigarren ekuazioa ondorioztatzeko (28) eta (30) ekuazioak erabili ditugu. Bi ekuazioen interpretazioa nahiko zuzena da. Alde batetik kanpo-indar erresultanteak zehaztuko du masa-zentroaren azelerazioa zein den, hau da, solido zurruna non dagoen. Bestetik, kanpo-indarrek sortutako indar-momentuak zehaztuko du zein den solido zurrunaren azelerazio-angeluar bektorea, hau da, solido zurrunak nolako biraketa duen masa-zentroaren inguruan. Solido zurruna guztiz zehazteko nahikoa denez jakitea masa-zentroa non dagoen eta solidoak nolako biraketa duen masa-zentroarekiko, (32) eta (33) ekuazioak nahikoak dira solido zurruna denboran nola higituko den zehazteko.

### 6.1 Masa-zentroarekiko ekuazioak

Askotan komenigarria izaten da (33) ekuazioa masa-zentroaren erreferentzia sisteman idaztea. Nolakoa izango litzake indar-momentua masa-zentrotik kalkulatuko bagenu?

$$\vec{M}_{kanpo} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,kanpo} \tag{34}$$

da, non $\vec{r}_i$ kanpoko erreferentzia-sisteman solido zurruneko $i$ partikulak duen posizio den eta $\vec{F}_{i,kanpo}$ partikula horren gaineko kanpo-indar erresultantea. Posizio hori

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{MZ} + \vec{r}_i' \tag{35}$$

izango da, non $\vec{r}_i'$ partikulak masa-zentroaren erreferentzia-sisteman duen posizioa baiten. Hortaz,

$$\vec{M}_{kanpo} = \vec{r}_{MZ} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i,kanpo} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times \vec{F}_{i,kanpo}. \tag{36}$$

$\vec{F}_{kanpo} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i,kanpo}$ denez eta $\vec{M}'_{kanpo} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times \vec{F}_{i,kanpo}$ masa-zentroaren erreferentzia-sistematik neurtutako indar-momentua denez:

$$\vec{M}_{kanpo} = \vec{r}_{MZ} \times \vec{F}_{kanpo} + \vec{M}'_{kanpo}. \tag{37}$$

Ekuazio hau (33) ekuazioarekin konparatuz argi ikusten dugu

$$\vec{M}'_{kanpo} = I\vec{\alpha} \tag{38}$$

dela.

Normalean askoz ere errazagoa izaten da kanpoko indarrek sortutako indar-momentua masa-zentroaren erreferentzia-sisteman kalkulatzea. Horregatik, solido zurrunaren dinamika zehazteko (32) eta (33) ekuazioak beharrean

$$\vec{F}_{kanpo} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{MZ} \tag{39}$$

$$\vec{M}'_{kanpo} = \frac{d\vec{L}'}{dt} = I\vec{\alpha} \tag{40}$$

ekuazioa baliokideak erabiltzen dira, non orain kanpo-indarrek sortutako indar-momentua masa-zentroaren erreferentzia-sisteman kalkulatzen den. Bi ekuazio hauen esangura are argiagoa da orain: lehenak masa-zentroaren azelerazioa ematen digu eta bigarrenak solidoaren biraketa masa-zentroaren inguruan.

## 7 Solido zurrunaren biraketaren dinamika

(39) eta (40) ekuaziek zehaztuko dute solido zurrunaren dinamika. Ekuazio hauek guztiz orokorrak dira, horregatik kasu orokorrean hauek ebaztea ez da erraza. Hemen biraketa bi egoera aztertuko ditugu: inertzia-ardatz nagusi baten inguruko biraketa hutsa eta ardatz finko batekiko biraketa hutsa.

## 7.1 Masa zentroaren inguruko biraketa

Suposa dezagun masa-zentroaren posizio finkoa dela kanpoko erreferentzia-sistema inertzial batean. Kasu honetan, beraz, kanpo-indarren baturak nulua izan behar du ($\vec{F}_{kanpo} = 0$) (39) ekuazioaren arabera $\vec{a}_{MZ} = 0$ izateko. Honela, solido zurrunaren dinamikaren ekuazioak honela sinplifikatzen zaizkigu:

$$\vec{F}_{kanpo} = 0 \tag{41}$$

$$\vec{M}'_{kanpo} = \frac{d\vec{L}'}{dt} = I\vec{\alpha}. \tag{42}$$

Beraz, kanpo-indarrek sortzen duten indar-momentuak zehaztuko du nolakoa izango den biraketa. $\vec{M}'_{kanpo} = 0$ bada solido zurrunaren azelerazio angeluarra nulua izango da eta bere abiadura angeluarra ez da aldatuko. Hau da, biratzen baldin bazegoen abiadura angeluar berdinarekin jarraituko du biratzen eta biratzen ez bazegoen biraketarik gabe jarraituko du.

$\vec{M}'_{kanpo}$ inertzia-ardatz nagusi batean baldin badago, orduan $I\vec{\alpha}$ matrize-biderkadurak ere inertzia-ardatz nagusi batekoa izan behar du. Demagun inertzia-ardatz nagusi hori adibidez $x$ dela. Badakigu $\vec{\omega}$ bektorea ardatz horretakoa denean $\vec{L}' = I_x\vec{\omega}$ izango dela, hau da, paraleloak direla abiadura angeluarra eta momentu angeluarra. Ondorioz, $\frac{d\vec{L}'}{dt} = I_x\vec{\alpha}$ izango da ere eta, orduan, $\vec{\alpha}$ bektorea ere inertzia-ardatz nagusi berdineko bektorea da. Beraz,

$$\vec{M}'_{kanpo} = I_x\vec{\alpha} = I_x\frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{43}$$

eta ez dugu matrize biderkadurarik egin behar $I_x$, $x$ ardatzeko inertzia-ardatz nagusiko inertzia-momentua, eskalar bat delako.

Inertzia-momentuen esangura fisikoa zein den ulertzeko bidea irekitzen digu (43) ekuazioak. Ikusten badugu, biraketarako dugun ekuazioa partikula puntual batentzako dugun Newton-en $\vec{F}_{tot} = m\vec{a}$ ekuazioaren baliokidea da

$$\begin{aligned} \vec{M}'_{kanpo} &\rightarrow \vec{F}_{tot} \\ I_x &\rightarrow m \\ \vec{\alpha} &\rightarrow \vec{a} \end{aligned}$$

aldaketak eginez gero. Hortaz, masa partikula puntualaren higidurarako dena da inertzia-momentua biraketarako. Masa partikula puntual baten inertzia intrintsekoa da, hau da, bere abiadura mantentzeko duen berezko joera. Honela, inertzia-ardatz nagusi batekiko inertzia-momentua solido zurrun batek ardatz horretan biratzeko duen berezko inertzia da, beste hitz batzuetan, ardatz horrekiko biraketan duen abiadura angeluarra mantentzeko joera. Beraz, inertzia-ardatz nagusi batekiko inertzia-momentu handia duen solido zurrun baten ardatz horrekiko abiadura angeluarra aldatzeko indar momentu handia ezarri beharko dugu, eta inertzia-momentua txikia bada indar-momentu txikia. Modu berean, partikula baten masa handia denean indar handi bat egin behar dugu bere gainean bere abiadura aldatzeko, eta masa txikia denean indar txikia.

### 7.2 Ardatz finko batekiko biraketa

Suposa dezagun orain $A$ ardatz finko batekiko ari dela biratzen solido zurruna eta ardatz hori ez dela masa-zentrotik igarotzen. Suposatuko dugu ordea $A$ ardatz finko hori paraleloa dela inertzia-ardatz nagusi batekiko. Kasu honetan solido zurrunaren momentu angeluarra $\vec{L} = I_A\vec{\omega}$ dela badakigu, non $I_A$ ardatz finkoarekiko inertzia-momentua baiten. Ekuazio hau betetzeko geure erreferentzia-sistema inertziala $A$ ardatz horretako puntu batean kokatu dugu. Ondorioz, (33) ekuazioa erreferentzia-sistema honetan kalkulatuz,

$$\vec{M}_{kanpo} = I_A\vec{\alpha} = I_A\frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{44}$$

berdintza izango dugu.

Azpimarratu behar dugu (44) ekuazioa erabiltzeko $\vec{M}_{kanpo}$ indar-momentua $A$ ardatzean kokatuta dugun erreferentzia-sistema batean kalkulatu behar dugula eta ez masa-zentroaren erreferentzia-sisteman. Izatez, (33) ekuazioari begiratzen badiogu, kasu honetan masa-zentroa biratzen ari denez, bere gainean kanpo-indar batek eragin behar du.

## 8 Higidura konbinatua eta errodadura

Higidura konbinatuan translazioa eta biraketa izango dugu, (39) eta (40) ekuazioak kontuan hartu beharko ditugularik.

Masa-zentroaren translazioa (39) ekuazioak zehaztuko du. Ekuazio honek diosku masa-zentroaren translazioa masa-zentroaren posizioan kokatuta dagoen eta solido zurrunaren masa totala duen partikula puntual baten berdina dela.

Solido zurrunaren biraketa (40) ekuazioak zehaztuko du. Suposa dezagun biraketa masa-zentroarekiko gertatzen dela inertzia-ardatz nagusi baten inguruan, hots $x$ ardatza. Kasu horretan inertzia-tentsorea diagonala izango da eta $\vec{\alpha}$ bektorea ere $x$ ardatzekoa izango da. Hortaz, (40) ekuazioa

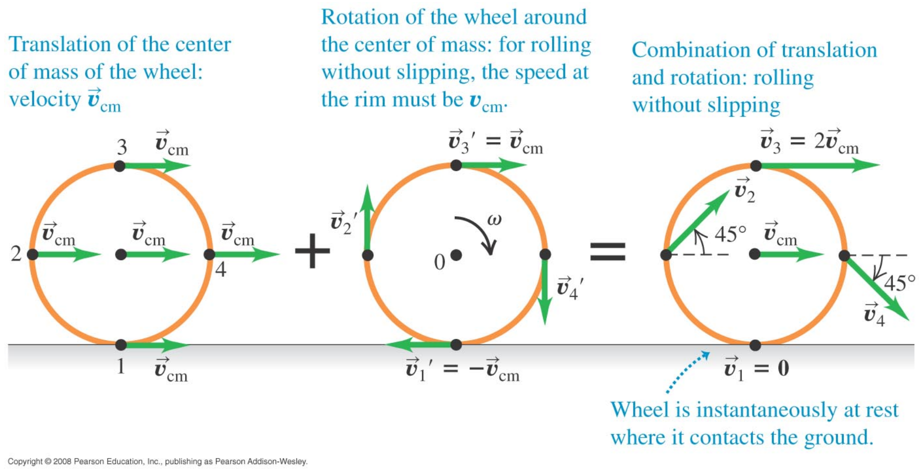
$$\vec{M}'_{kanpo} = I_x\vec{\alpha} \tag{45}$$

moduan idatzi ahalko dugu, non $I_x$ biraketa ardatz nagusiarekiko inertzia-momentua baiten.

### 8.1 Labainketarik gabeko errodadura

Translazioa eta biraketa duguneko kasu berezi bat da labainketarik gabeko errodadura. Har dezagun $R$ erradioa duen solido zurruna (gurpil bat, zilindro bat, esfera bat, etab.), zeinen masa-zentroa erdigunean dagoen. Labainketarik ez badago masa-zentroaren abiadura eta masa-zentroarekiko biraketa abiadura angeluarra erlazionaturik daude. Izan ere, $T$ biraketa periodo batean masa-zentroak aurrera egiten duen distantzia $2\pi R$ izan behar da. Hau da,

$$2\pi R = v_{MZ}T = v_{MZ}\frac{2\pi}{\omega} \tag{46}$$




Irudia 6: Gurpil baten errodadura labainketarik gabe bi higiduren batura bezala ulertu daiteke, translazioa eta biraketa. Gurpila labaintzen ez bada kontaktu puntuaren abiadura nulua da.

eta, honela, labainketarik ez badugu,

$$v_{MZ} = R\omega. \tag{47}$$

6 irudian erakusten den bezala, labainketarik gabeko errodaduraren higidura masa-zentroaren translazio eta masa-zentroarekiko biraketetan deskonposatzen badugu, erraz ikus daiteke solido zurrunaren eta lurzoruaren arteko kontaktu puntua geldi dagoela bere abiadura nulua baita. Beraz, labainketarik gabeko errodadura dugunean solido zurrunaren eta lurzoruaren arteko marruskadura estatikoa da. Solidoa labaintzen balego kontaktu puntuaren abiadura ez-nulua litzake eta, ondorioz, marruskadura zinetikoa.

(39) ekuazioaren arabera, kanpo-indarrak nuluak ez badira masa-zentroaren abiadura aldatuko da. Nahiz eta masa-zentroaren abiadura aldatu solido zurrunak labaindu gabeko errodaduran egon daiteke, hots bizikleta bat maldan behera abiatzen denean. Kasu horietan masa-zentroaren azelerazioa eta masa-zentroaren inguruko biraketaren azelerazio angeluarra egongo dira loturik. (47) adierazpena denborarekiko deribatuz

$$a_{MZ} = R\alpha \tag{48}$$

adierazpena lortuko dugu.

# 9 Solido zurrunaren energia eta lana

Solido zurrunaren higidura zehazteko nahikoak dira (39) eta (40) ekuazioak. Ekuazio hauek partikula puntualaren dinamikarentzako Newtonen ekuazioa denaren baliokideak dira. Ordea, energiaren analisia oso erabilgarria da partikula puntualaren dinamikako problemak ebazteko, askotan Newtonen ekuazioak ebaztea baino errazagoa. Solido zurrunean ere energia eta lana oso kontzeptu erabilgarriak dira problema asko ebazteko.

## 9.1 Energia zinetikoa

Lehenik azter dezagun nola kalkulatzen den solido zurrun baten energia zinetikoa. Solido zurruna partikula-sistema bat denez, bere energia zinetikoa erreferentzia-sistema inertzial batean

$$E_z = \frac{1}{2} M v_{MZ}^2 + E_z' \tag{49}$$

bezala kalkula daiteke, hau da, masa-zentroaren energia zinetikoaren eta masa-zentroaren erreferentzia-sisteman neurtutako energia zinetikoaren arteko batura bezala. Suposa dezagun orain solido zurruna masa-zentroarekiko biratzen ari dela inertzia-ardatz nagusi baten inguruan, hots, $x$ ardatzaren inguruan. Kasu honetan erraz kalkulatu daiteke masa-zentroaren erreferentzia-sisteman solidoak duen energia zinetikoa, solidoko partikula bakoitzak izango duen abiadura $\vec{v}_i' = \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$ baita:

$$E_z' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i')^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i d_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_x \omega^2, \tag{50}$$

non $I_x$ biraketa ardatz-nagursiarekiko inertzia-momentua baiten. Honela, solido zurrunaren energia zinetikoa

$$E_z = \frac{1}{2} M v_{MZ}^2 + \frac{1}{2} I_x \omega^2 \tag{51}$$

ekuazioaren bidez kalkula daiteke. (51) ekuazioa erraz interpreta daiteke: lehenengo batugaia solidoa transladatzen ari delako duen energia zinetikoa da eta bigarren batugaia solidoaren biraketari dagokion energia zinetikoa.

## 9.2 Energia balantzea solido zurrunean

Partikula sistema batean energia balantzearen ekuazioak zera zioen:

$$\Delta E_z = W_{kanpo} + W_{barne}. \tag{52}$$

Solido zurruna osatzen duten partikulen arteko distantziak aldatzen ez direnez, barne-indarrek ez dute lanik egiten solido zurrun batean. Beraz, solido zurrunean $W_{barne} = 0$ eta

$$\Delta E_z = W_{kanpo}, \tag{53}$$

hau da, solidoaren energia zinetikoa aldatuko da soilik kanpo-indarrek lan egiten badute.

Kanpo-indarrak kontserbakorrak direnean, eurek egiten duten lana energia potentzialaren aldakuntzaren aurkakoa izango da:

$$W_{kanpo} = \Delta E_{p,kanpo}. \tag{54}$$

Ondorioz, kasu hauetan sistemaren energia osoa, $E = E_z + E_{p,kanpo}$, ez da aldatuko:

$$\Delta E = \Delta E_z + \Delta E_{p,kanpo} = 0. \tag{55}$$

Kasu hauetan energia osoa kontserbatuko da.

# 10 Estatika

Solido zurrun bat orekan dagoela diogunean esan nahi dugu badagoela erreferentzia-sistema inertzial bat non solidoa ez den transladatzen eta ez duen biratzen. Hori hala izateko bi baldintza bete behar dira, masa-zentroaren azelerazioak eta azelerazio angeluarrak nuluak izan behar dute. Solido zurrunaren dinamikaren (32) eta (33) ekuazioei so eginez gero, ikusten dugu oreka baldintzak

$$\vec{F}_{kanpo} = 0 \tag{56}$$

$$\vec{M}_{kanpo} = 0 \tag{57}$$

direla. Kanpo-indarrek sortzen duten indar-momentua edozein erreferentzia-sistema inertzial horretako edozein puntutik izan behar da nulua.

## 10.1 Grabitate-zentroa

Oreka baldintzak aplikatzerako beharrezkoa den $\vec{M}_{kanpo}$ kalkulatzeko jakin behar dugu solido zurrun bati indarrak non aplikatzen zaizkion. Kontaktu-indarrekin, hots, normalak eta marruskadura indarrak, hau erraza da: kontaktu puntuan eragiten dute. Baina kontaktu indarrak ez direnak, hots, pisua, non aplikatzen dira?

Suposa dezagun solido zurrun batean grabitateak eragiten duela eta jakin nahi dugu zein den grabiteteak sortzen duen indar-momentua:

$$\vec{M}_{kanpo} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,kanpo} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times (m_i \vec{g}) \tag{58}$$

pisuak solidoko partikula guztiei eragiten baitie. Beraz,

$$\vec{M}_{kanpo} = \left( \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} = M \vec{r}_{MZ} \times \vec{g} = \vec{r}_{MZ} \times (M \vec{g}). \tag{59}$$

Ekuazio honen esangura oso garbia da, pisua masa-zentroan aplikatzen da solidoaren masa totala kontuan harturik. Solido batean pisua aplikatzen den puntuari grabitate-zentroa deritzo. Beraz, grabitate-zentroa bat dator masa-zentroarekin.

Solidoko partikula guztiei azelerazio berdina ezarriko liekeen beste edozein kanpo-indar ere masa-zentroan aplikatuko litzake, pisua bezalaxe.