Elektrostatika

Gaien Aurkibidea

Erreferentziak

- *Física Universitaria* 13. edizioa. Sears eta Zemansky. Pearson:
  21., 22., 23. eta 24. kapituluak

- *Fisika zientzialari eta ingeniarientzat.* Fishbane, Gasiorowicz eta Thornton. UPV/EHU:
  22., 23., 24., 25. eta 26. kapituluak

1 Naturaren indarrak eta karga elektrikoa

Indar elektromagnetikoa naturaren oinarrizko lau indarretako bat da indar grabitatorioa, indar nuklear ahula eta indar nuklear bortitza bezala. Indar nuklearrak nukleo atomikoan dira soilik agerikoak, eta grabitatorioa eskala planetarioan. Ordea indar elektromagnetikoak geure eguneroko bizitzan gertatzen den oro zehazten duela esan genezake. Izan ere, kimika eta biologia guztiaren atzean dago indar elektromagnetikoa, baita gizakiok sortu dugun teknologia gehienaren atzean.

Indar elektromagnetikoak kargen arteko elkarrekintza deskribatzen du. Karga, masa bezala, naturaren oinarrizko partikulen propietate intrintseko bat da eta partikulek indar elektromagnetikoarekin nolako elkarrekintza duten zehazten du. Atomoak neutroak badira ere, hau da, ez dute kargarik, bere osagaiak diren elektroi eta protoiak kargadun partikulak dira. Elektroi eta protoien karga berdina da $e = 1.602 \times 10^{-19} C$, baina zeinuz aurkakoa (1 taulan laburbiltzen dira atomoen osagarriak diren elektroi, protoi eta neutroien masak eta kargak). e-ri oinarrizko karga deritzogu. Masa ez bezala, kargak zeinua du, hau da positiboa edo negatiboa izan daiteke. Kargaren zeinuak zehaztuko du neurri batean nolakoa den karga horren elkarrekintza indar elektromagnetikoarekin.

Sistema internazionalean karga Coulomb (C) unitatetan neurtzen da.

Taula 1: Elektroi, protoi eta neutroien masa eta karga.

	Masa	Karga
Elektroia	$m_e = 9.110 \times 10^{-31} kg$	$q_e = -e = -1.602 \times 10^{-19} C$
Protoia	$m_p = 1.673 \times 10^{-27} kg$	$q_p = +e = 1.602 \times 10^{-19} C$
Neutroia	$m_n = 1.675 \times 10^{-27} kg$	$q_n = 0$

1.1 Kargaren kuantizazioa eta kontserbazioa

Naturan topatu dezakegun edozein karga elektroi edo protoi kopuru finitu batez osatuta dago. Beste modu batera esanda, karga guztiak elektroi edo protoien kargaren multiplo dira. Hots, q karga badugu

$$q = \pm ne, \tag{1}$$

non n zenbaki natural bat den eta q kargan ditugun elektroi edo protoi kopurua zehazten duen. Honek esan nahi du naturan karga kuantizatua dagoela, karga guztiak $\pm e$-ren multiplo direlako.

Adibidea:

$Q = 110 \times 10^{-9} C$ karga duen bidriozko hagatxo bat dugu, zein zetarekin igurtziz kargatu den. Zenbat elektroi kendu dizkiogu marruskaduraren bitatez?

$Q = ne$ izan behar denez, $n = Q/e = 6.9 \times 10^{11}$ elektroi kendu dizkiogu.

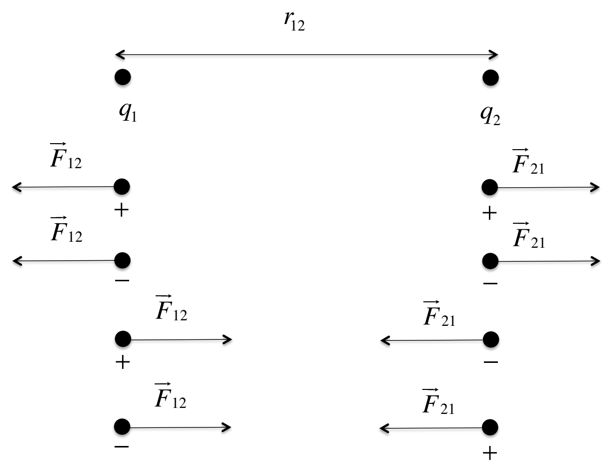
Kargaren kuantizazioaz gainera, naturaren beste lege garrantzitsu bat da kargaren kontserbazioa. Izatez, karga beti kontserbatu egiten da. Edozein elkarrekintza kimiko edo nuklearrean karga kopurua beti konstante mantentzen da.

2 Coulomb-en legea

Coulomben legeak zehazten du nolakoa den karga desberdinen arteko elkarrekintza karga hauek mugimenduan ez daudenean. Coulomben legea da, beraz, elektrostatikaren oinarria.

Suposa dezagun, 1 irudian bezala, q_1 eta q_2 kargak ditugula r_{12} distantziaz banaturik. Esperimentalki honako ezaugarriak behatzen dira:

- q_1 eta q_2 kargak zeinu berekoak badira kargek pairatutako indarra aldaratzailea da.
- q_1 eta q_2 kargak zeinu aurkakoak badira kargek pairatutako indarra aldaratzailea da.
- Indar elktrikoak akzio-erreakzioaren printzipioa betetzen du. Hau da q_1 kargaren gainean q_2 kargak sortutako $\vec{F}_{12}$ indarra q_2 kargaren gainean q_1 kargak sortutako $\vec{F}_{21}$ indarraren berdina da moduluz baina aurkako noranzkoa du:
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{2}$$
- Sortzen den indarra partikulen arteko distantziaren karratuaren alderantziz proportzionala da:
$$F_{12} \propto \frac{1}{r_{12}^2}. \tag{3}$$

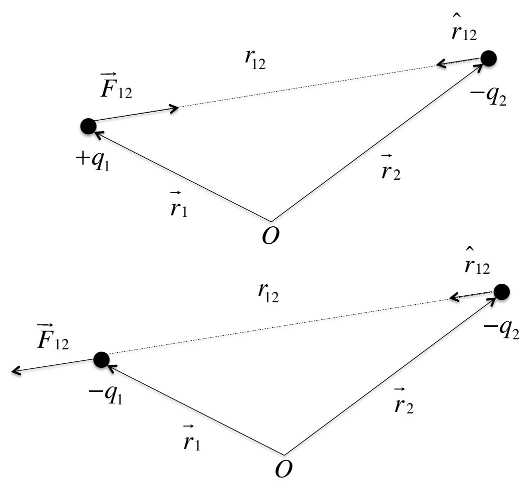


Irudia 1: q_1 eta q_2 kargak ditugu r_{12} distantziaz banaturik. Bi kargek zeinu bera baldin badute elkarrekintza aldaratzailea da, baina biek kontrako zeinua badute elkarrekintza erakarlea da.

- Sortzen den indarra kargen arteko biderkaduraren zuzenki proportzionala da:
$$F_{12} \propto q_1 q_2. \tag{4}$$

Coulomben legeak behaketa esperimental hauek guztiak azaltzen ditu. Honela formulatzen da: q_1 kargaren gainean r_{12} distantziara dagoen q_2 partikulak sortuko duen $\vec{F}_{12}$ indarra
$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \tag{5}$$
da. Bertan, $\hat{r}_{12}$ bektore unitarioa 2. partikulatik 1. partikulara doan bektore unitarioa da, hau da,
$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r_{12}}, \tag{6}$$
non $\vec{r}_1$ q_1 kargaren posizio-bektorea eta $\vec{r}_2$ q_2 kargaren posizio-bektorea diren. Bi kargen arteko r_{12} distantzia noski $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ da. 2 iruduan agertzen da Coulomben indarraren adibide bat, zeinetan argi ikusten den indarraren norabidea bi kargak lotzen dituen lerroak zehazten duela eta indarraren noranzkoa kargen zeinuek.

Cuolomben legean agertzen zaigun ϵ_0 konstanteari hutsaren permitibitate dielektrikoa deritzo. Bere balioa
$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2} \tag{7}$$



Irudia 2: $\pm q_1$ kargaren gainean $-q_2$ karga negatiboak sortzen duen $\vec{F}_{12}$ indarra Coulomben legearen arabera. O erreferentzia-sistemaren jatorria da, zeinetatik neurtzen diren kargen $\vec{r}_1$ eta $\vec{r}_2$ posizio-bektoreak.

da. Ohikoa da ere

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \times 10^9 Nm^2C^{-2} \tag{8}$$

konstantea definitzea Coulomben legean agertzen zaigun konstantea sinplifikatzeko.

Adibidea:

Konparatu dezagun indar elektrikoa eta grabitatorioa hidrogeno atomo batean. Suposa dezagun elektroiak higidura zirkularra duela nukleoaren inguruan $r \sim 5 \times 10^{-11} m$-ko erradioarekin.

Hidrogeno atomoaren protoiaren eta elektroiaren arteko indar elektrikoaren modulua

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_p q_e|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = 9 \times 10^{-8} N \tag{9}$$

da, eta indar grabitatorioarena

$$F_g = G\frac{m_p m_e}{r^2} = 4 \times 10^{-47} N \tag{10}$$

da. Beraz,

$$\frac{F_e}{F_g} \sim 2 \times 10^{39} \tag{11}$$

da. Indar elektrikoa grabitatorioa baino 10^{39} aldiz bortitzagoa da!

2.1 Gainezarpen printzipioa

Demagun orain karga asko ditugula eta jakin nahi dugula zein den karga bakoitzaren gaineko indarra. Gainezarpen printzipioaren arabera, karga bakoitzaren gaineko indar totala beste kargekin duen indar elektrikoen batura izango da. Hau da, i partikulak pairatuko duen $\vec{F}_i$ indar totala

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij} \tag{12}$$

izango da. Hots, lau karga baditugu bigarren partikulak jasango duen indar totala

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{24} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \hat{r}_{23} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_4}{r_{24}^2} \hat{r}_{24} \tag{13}$$

izango da.

Adibidea:

3 irudian erakusten den moduan hiru karga estatiko ditugu. Kalkula dezagun zein den 1 kargaren gaineko indarra gainezarpen printzipioa erabiliz:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(2 \times 10^{-9} C)(2 \times 10^{-9} C)}{(2m)^2} (-\hat{u}_x) + \frac{(2 \times 10^{-9} C)(-3 \times 10^{-9} C)}{(2m)^2} (-\hat{u}_y) \right] \\
&= (-8.988 \hat{u}_x + 13.482 \hat{u}_y) \times 10^{-9} N.
\end{aligned}$$

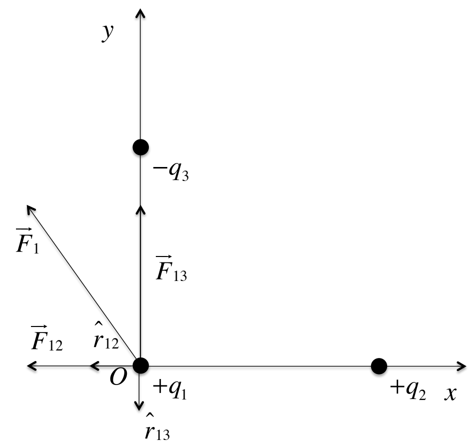
---

3 Eremu elektrikoa

Eremu elektrikoaren kontzeptua oso erabilgarria da partikula kargatu batek pairatzen duen indar elektrikoa kalkulatzeko, eremu grabitatorioa masa batek pairatzen duen indar grabitatorioa kalkulatzeko erabilgarria den bezalaxe. Demagun q_0 frogako karga txikia dugula, zeinak $\vec{F}$ indar elektrikoa pairatzen duen. Orduan, karga dagoen puntuan dugun eremu elektrikoa

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \tag{14}$$

bezala definitzen da. Eremuaren definizioan karga txikia izatea eskatzen da indar elekrikoa sortzen duten kargetan eragin arbuiagarria izateko. Eremu elektrikoa bektore bat da eta N/C unitateetan eman ohi da sistema internazionalean.



Irudia 3: $q_1 = 2nC$ karga jatorrian dago, $q_2 = 2nC$ karga $\vec{r}_2 = 2\hat{u}_x m$ posizioan dago eta $q_3 = -3nC$ karga $\vec{r}_3 = 2\hat{u}_y m$ posizioan dago.

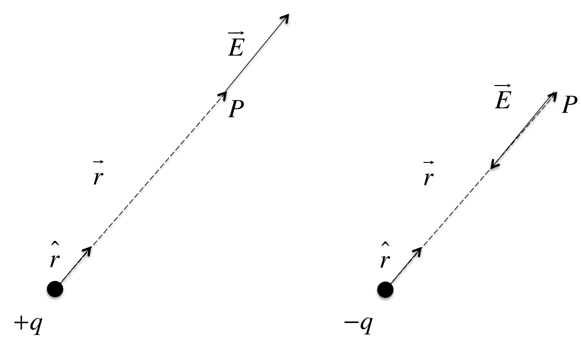
Eremu elektrikoa oso kontzeptu erabilgarria da eremuaren eraginpean dagoen edozein partikulak zelako indar elektrikoa pairatzen duen jakiteko. Izan ere, q partikula $\vec{E}$ eremu elektrikoa dugun puntuan kokatzen badugu

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{15}$$

indar elektrikoa jasango du kargak. Eremu elektrikoak ez digu elkarrekintza elektriko bat ematen, kargek elkarrekintza elektrikoa izateko gaitasuna baizik. (15) ekuazioaren izaera bektorialak erakusten digu $\vec{E}$ eremu elektrikoan kokatzen dugun partikularen karga positiboa denean indarra eta eremua noranzko berdinekoak direla, baina karga negatiboa denean indarra eta eremua kontrako noranzkokoak direla.

3.1 Eremu elektrikoaren kalkulua

Azter dezagun karga puntualek, karga puntual multzoek eta karga banaketa jarraituek sortzen duten eremu elektrikoa nola kalkulatzen den.



Irudia 4: $\pm q$ kargak beregandik $\vec{r} = r\hat{r}$ posizioan dagoen P puntuan sortzen duen eremu elektrikoa.

3.1.1 Karga puntual batek sortzen duen eremu elektrikoa

Demagun q_1 karga dugula q_0 frogako karga txikiari indar elektriko bat sortzen diona. Coulomben legeak dioenez

$$\vec{F}_{01} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0 q_1}{r_{01}^2}\hat{r}_{01} \tag{16}$$

izango da q_0 frogako kargaren gaineko indarra. Beraz, (14) ekuazioko definizioa jarraituz, q_1 kargak sortzen duen eremua q_0 karga dagoen puntuan

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_{01}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_{01}^2}\hat{r}_{01} \tag{17}$$

da, non $\hat{r}_{01}$ q_1 kargatik q_0 karga dagoen puntura doan norabideko bektore unitarioa den eta r_{01} bi kargen arteko distantzia.

Orokorrean ez dugu q_0 froga karga erabili behar jakiteko partikula puntual batek zelako eremu elektrikoa sortzen duen espazioko edozein puntutan. Aurreko kasua jarraituz, ikusten dugu q karga puntual batek kargatik $\vec{r}$ distantziara dagoen espazioko edozein P puntuan sortzen duen eremua

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \tag{18}$$

dela, non $\vec{r} = r\hat{r}$ kargatik P puntura doan bektorea den (ikus 4 irudia), hau da, r kargatik P puntura dagoen distantzia da eta $\hat{r}$ kargatik P puntura doan norabideko bektore unitarioa da. Irudian erakusten den moduan, eremu elektrikoaren norabidea $\hat{r}$ bektoreak zehazten du, baina q kargaren zeinuak zehazten du eremu elektrikoaren noranzkoa.

3.1.2 Karga puntual multzo batek sortzen duen eremu elektrikoa

Karga puntual bakarra izan beharrean karga puntual multzo bat badugu, honek espazioko edozein P puntutan sortzen duen eremu elektrikoa kalkulatzeko gainezarpen printzipioaz baliatuko gara. Suposa dezagun geure frogako q_0 kargak $q_1, \cdots, q_n$ kargekin elkarrekintza coulombearra duela. Gainezarpen printzipioa dela eta jasango duen indarra

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \cdots + \vec{F}_{0n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0 q_1}{r_{01}^2}\hat{r}_{01} + \cdots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0 q_n}{r_{0n}^2}\hat{r}_{0n}. \tag{19}$$

Beraz q_0 karga dagoen puntuan $q_1, \cdots, q_n$ karga multzoak sortzen duen eremu elektrikoa

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_{01}^2}\hat{r}_{01} + \cdots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_n}{r_{0n}^2}\hat{r}_{0n} \tag{20}$$

da.

Notazioa sinplifikatu dezakegu ohartzen baldin bagara batugai bakoitza karga bakoitzak sortzen duen eremua dela (18) ekuazioa jarraituz. Hortaz, orokorrean, karga puntual multzo batek sortuko duen eremua edozein P puntuan

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \cdots + \vec{E}_n \tag{21}$$

izango da, $\vec{E}_i$ i kargak sortzen duen eremua izanik. Hots,

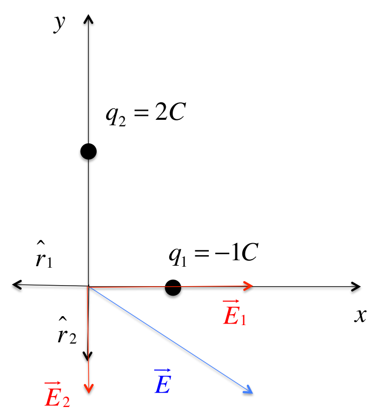
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1 + \cdots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_n}{r_n^2}\hat{r}_n, \tag{22}$$

non r_i i karga dagoen puntutik eremua kalkulatu nahi dugun P puntura dagoen distantzia den eta $\hat{r}_i$ i karga dagoen puntutik eremua kalkulatu nahi dugun P puntura doan norabideko bektore unitarioa den.

Adibidea:

5 irudian erakusten den moduan bi karga estatiko ditugu: $q_1 = -1C$ karga $\vec{e}_1 = 1\hat{u}_x m$ posizioan dago eta $q_2 = 2C$ karga $\vec{r}_2 = 2\hat{u}_y m$ posizioan. Kalkula dezagun zein den jatorrian sortzen duten eremua. Karga puntual multzo batek sortzen duen eremua karga puntualek sortzen duten eremuen batura denez, eremua jatorrian

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_1^2}\hat{r}_2 \\ &= 9Nm^2C^{-2}\left[\frac{-1C}{(1m)^2}(-\hat{u}_x) + \frac{2C}{(2m)^2}(-\hat{u}_y)\right] = 9\left(\hat{u}_x - \frac{1}{2}\hat{u}_y\right)\frac{N}{C} \quad (23)\end{aligned}$$



Irudia 5: $q_1 = -1C$ karga $\vec{r}_1 = 1\hat{u}_x m$ posizioan dago eta $q_2 = 2C$ karga $\vec{r}_2 = 2\hat{u}_y m$ posizioan. Bi karga hauek jatorrian sortzen duten eremua irudikatzen da karga bakoitzak sortzen duen eremuen batura bezala: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

da. Honela jatorrian $q = 1C$ karga kokatzen badugu

$$\vec{F} = q\vec{E} = 9\left(\hat{u}_x - \frac{1}{2}\hat{u}_y\right) N$$

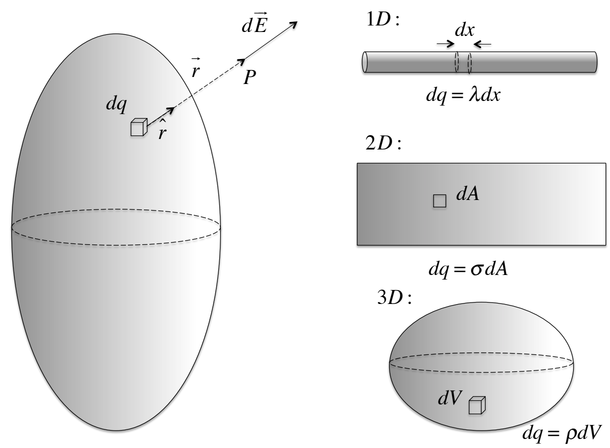
indarra jasango du eta $q = -1C$ karga kokatzen badugu

$$\vec{F} = q\vec{E} = -9\left(\hat{u}_x - \frac{1}{2}\hat{u}_y\right) N$$

indarra, aurrekoaren berdina moduluz, baina aurkako noranzkoa duena.

3.1.3 Karga-banaketa jarraituek sortzen duen eremu elektrikoa

Orain arte karga puntualek sortzen duten eremua aztertu dugu, baina askotan karga ez zaigu agertzen karga puntualez osatuta, karga bolumen osoan modu jarraituan banatzen da. Har dezagun 6 irudiko ezker aldeko q karga totala duen V bolumena. Karga total hau bolumen osoan dago banatuta modu jarraituan. Karga-banaketa jarraitu honek sortzen duen eremua kalkulatzeko dq karga elementu infinitesimalak sortzen duen eremutik abiatuko gara. Honek beregandik



Irudia 6: Ezkerreko irudian erakusten da q karga totala duen V bolumen bateko dq karga infinitesimalak zein $d\vec{E}$ eremu elektriko infinitesimal sortzen duen P puntuan, zein elementu infinitesimaletik $\vec{r} = r\hat{r}$ distantziara dagoen. Eskuin aldean erakusten da dq karga nola kalkulatzen den λ karga-dentsitate linealaren funtzioan dimentsio bakarreko (1D) kasuan, σ gainazaleko karga-dentsitatearen funtzioan bi dimentsioko (2D) kasuan eta ρ bolumeneko karga-dentsitatearen funtzioan hiru dimentsioko (3D) kasuan.

$\vec{r} = r\hat{r}$ distantziara dagoen P puntuan sortzen duen eremu infinitesimala partikula puntual batek sortzen duena izango da:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}. \tag{24}$$

Bolumen osoak sortzen duen eremua kalkulatzeko, elemetu infinitesimal guztiek sortzen duten eremua batuz lortuko dugu. Hori $d\vec{E}$ bolumen osora integratuz lortzen da:

$$\vec{E} = \iiint_V d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V \frac{dq}{r^2}\hat{r}. \tag{25}$$

(25) ekuazioa erabiliz karga-jarraituko elementu batek edozein puntutan sortzen duen eremua kalkulatzea ez da erraza karga elementu infinitesimal bakoitzak sortzen duen eremua jakin behar baitugu. Hau errazteko karga-dentsitateak erabiltzen dira.

- Dimentsio bakarreko (1D) karga-banaketa:
  1D karga-banaketa dugunean λ karga-dentsitate lineala definitzen da. λ puntu batean luzera unitateko dagoen karga da. Hortaz, 6 irudiko eskuin aldean azaltzen den bezala, 1D karga-banaketako dq elementuaren luzera dx bada,

$$dq = \lambda dx \tag{26}$$

izango da elementu infinitesimalaren karga. 1D objektuaren karga uniformeki banatuta badago, hau da, λ karga-dentsitate lineala objektuaren puntu guztietan berdina bada,

$$\lambda = \frac{q}{L} \tag{27}$$

izango da, non q objektuaren karga totala den eta L bere luzera.

- Bi dimentsioko (2D) karga-banaketa:
  2D karga-banaketa dugunean σ gainazaleko karga-dentsitatea definitzen da. σ gainazaleko puntu batean azalera unitateko dagoen karga da. Hortaz, 6 irudiko eskuin aldean azaltzen den bezala, 2D karga-banaketako dq elementuaren azalera dA bada,

  $$dq = \sigma dA \tag{28}$$

  izango da elementu infinitesimalaren karga. 2D objektuaren karga uniformeki banatuta badago, hau da, σ gainazaleko puntu guztietan berdina bada,

  $$\sigma = \frac{q}{A} \tag{29}$$

  izango da, non q objektuaren karga totala den eta A bere azalera.

- Hiru dimentsioko (3D) karga-banaketa:
  3D karga-banaketa dugunean ρ bolumeneko karga-dentsitatea definitzen da. ρ bolumeneko puntu batean bolumen unitateko dagoen karga da. Hortaz, 6 irudiko eskuin aldean azaltzen den bezala, 3D karga-banaketako dq elementuaren bolumena dV bada,

  $$dq = \rho dV \tag{30}$$

  izango da elementu infinitesimalaren karga. 3D objektuaren karga uniformeki banatuta badago, hau da, ρ bolumeneko puntu guztietan berdina bada,

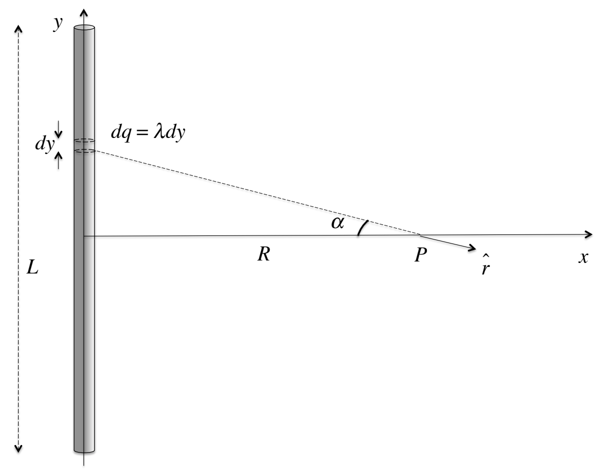
  $$\rho = \frac{q}{V} \tag{31}$$

  izango da, non q objektuaren karga totala den eta V bere bolumena.

Adibidea: Karga uniformeki banatuta eta L luzera duen hagatxoak sortzen duen eremu elektrikoa.

7 irudian L luzera eta λ karga-dentsitate lineal uniformea duen hagatxoa erakusten da. Bere erdiko puntutik R distantziara dagoen P puntuan kalkulatu nahi dugu eremu elektrikoa. Horretarako 7 irudian agertzen den dy luzerako dq kargako elementu infinitesimalak sortzen duen eremua kalkulatuko dugu:

$$\begin{aligned} d\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dy}{\left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)^2}(\cos\alpha\hat{u}_x - \sin\alpha\hat{u}_y) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R d\alpha}{\cos^2\alpha\left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)^2}(\cos\alpha\hat{u}_x - \sin\alpha\hat{u}_y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}(\cos\alpha\hat{u}_x - \sin\alpha\hat{u}_y)d\alpha, \end{aligned}$$



Irudia 7: L luzera eta λ karga-dentsitate lineal uniformea duen hagatxoak sortzen duen eremu elektrikoaren kalkulua.

non $y = R\tan\alpha$ denez $dy = Rd\alpha/\cos^2\alpha$ dela erabili dugun. Hagatxoak sortzen duen eremu totala lortzeko aurreko adierazpena integratu behar dugu hagatxoaren luzera osora:

$$\vec{E} = \int_L d\vec{E} = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}(\cos\alpha\hat{u}_x - \sin\alpha\hat{u}_y)d\alpha,$$

non α_0 angeluak hartzen duen baliorik handiena den eta, beraz, $\sin\alpha_0 = \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2+R^2}}$. Integratuz,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} 2\sin\alpha_0 \hat{u}_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\frac{L}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + R^2}}\hat{u}_x$$

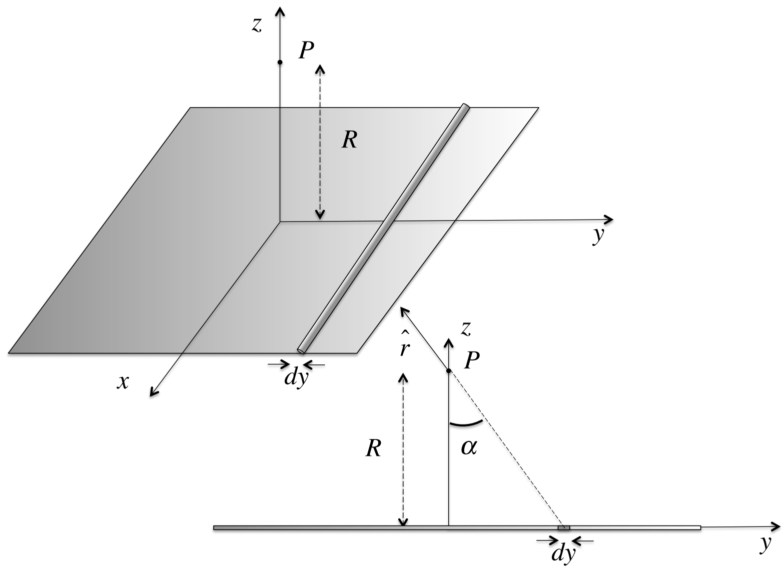
emaitza lortzen dugu.

Interesgarria da hagatxo infinitoki luze batek sortzen duen eremua kalkulatzea. Aurreko emaitzaren $L \to \infty$ limitea hartuz lortu dezakegu. Hagatxo infinituak sortzen duen eremua hagatxotik R distantziara

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\hat{u}_x \tag{32}$$

da.

Adibidea: Karga uniformeki banatuta duen xafla infinituak sortzen duen eremua.



Irudia 8: Gainazaleko karga-dentsitate uniformea duen xafla infinituak sortzen duen eremu elektrikoaren kalkulua. Xaflaren bi perspektiba desberdin erakusten dira.

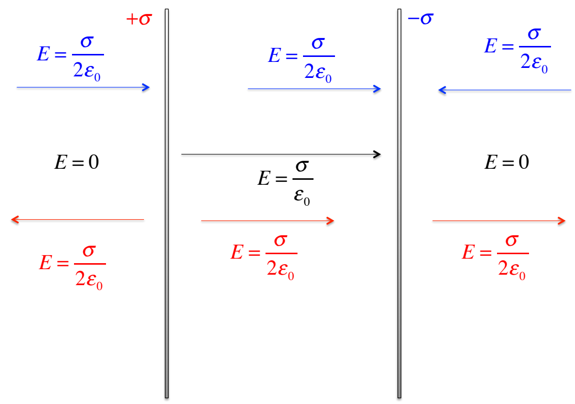
8 irudian σ gainazaleko karga-dentsitate uniformea duen xafla infinitua dugu. Beregandik R distantziara dagoen P puntuko eremua kalkulatzeko hagatxo infinitoak sortzen duen eremua erabiliko dugu, aurreko adibidean kalkulatu duguna. Elementu infinitesimal bezala y-n dagoen hagatxo infinitua hartuko dugu, zeinen zabalera dy izango den. Xafla batean karga-dentsitate lineala ez dago definituta, baina hau $\lambda = \sigma dy$ bezala lortu dezakegu. Hau ordezkatuz (32) ekuazioan, hagatxo infinitesimalak sortzen duen eremu infinitesimala

$$d\vec{E} = \frac{\sigma dy}{2\pi\epsilon_0 \frac{R}{\cos\alpha}}(-\sin\alpha\hat{u}_y + \cos\alpha\hat{u}_z) = \frac{\sigma d\alpha}{2\pi\epsilon_0 \cos\alpha}(-\sin\alpha\hat{u}_y + \cos\alpha\hat{u}_z)$$

da, non $dy = Rd\alpha/\cos^2\alpha$ erabili dugun. Xafla infinitua denez, $d\vec{E}$ angeluaren $[-\pi/2, \pi/2]$ balioetarako integratu behar dugu. Honela

$$\vec{E} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sigma d\alpha}{2\pi\epsilon_0}(-\tan\alpha\hat{u}_y + \hat{u}_z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{u}_z. \tag{33}$$

Ikusten dugunez, xafla inifinitoak edozein puntutan xaflarekiko perpendikularra den eremu elektrikoa sortzen du, zeinen moduloa beti berdina den, $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.



Irudia 9: $+\sigma$ karga-dentsitatea eta $-\sigma$ karga-dentsitatea duten bi xafla infinitu eta paralelok sortzen duten eremu elektrikoa.

Adibidea: Karga-dentsitate bera baina aurkako zeinukoa duten bi xafla infinitu eta paralelok sortzen duten eremua.:w

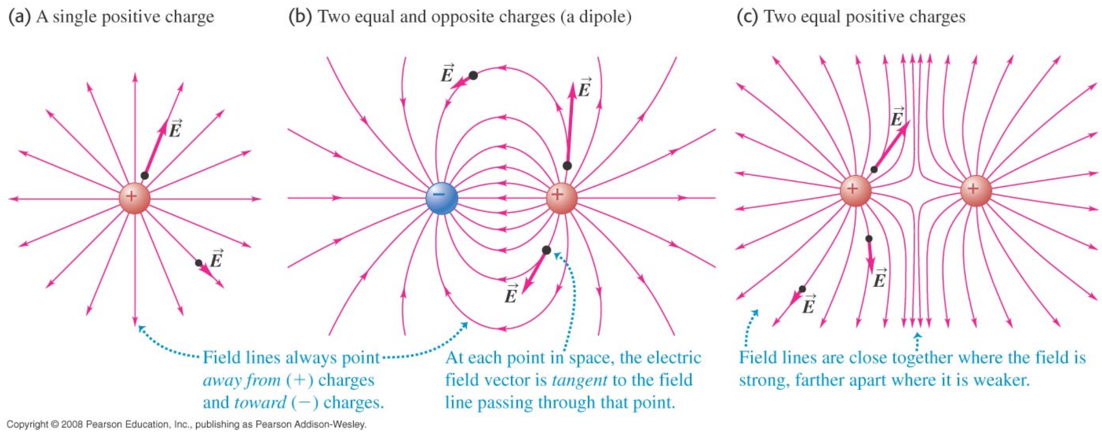
9 irudian $+\sigma$ karga-dentsitatea eta $-\sigma$ karga-dentsitatea duten bi xafla infinitu eta paralelok sortzen duten eremu elektrikoa nola kalkulatzen den ikusten da. Eremu totala xafla bakoitzak sortuko duen eremuen batura denez, xaflen kanpoan eremu totala nulua da, baina xaflen artean $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ da, xafla positibotik negatibora zuzenduta. Xafla paraleloek nolabait eremu elektrikoa metatzen dute euren artean.

3.2 Eremu-lerroak

Espazioko edozein puntutan eremu elektrikoa nolakoa den irudikatzeko eremu-lerroak erabiltzen dira. Eremu-lerroak irudikatzeko bi arau jarraitu behar dira

- Puntu bakoitzean $\vec{E}$ eremu elektrikoa eremu-lerroen tangentziala da. Eremu-lerroen noranzkoak zehazten du ere $\vec{E}$ bektorearen noranzkoa.
- Eremu-lerroen dentsitatea eremu elektrikoaren moduluaren proportzionala da.

Adibide moduan, 10 irudian agertzen dira karga-banaketa desberdinek sortzen dituzten eremu-lerroak.



Irudia 10: Karga positibo puntual batek, bi karga berdin baina aurkako zeinukoek eta bi karga positibok sortutako eremu-lerroak.

4 Gauss-en legea

Karga-banaketa jarraitu batek sortzen duen eremua dq elementu infinitesimal batetik abiatuz kalkulatzea konplexua izan daiteke, integral konplexuak ebatzi behar direlako. Gaussen legeak eremua kalkulatzeko modu alternatibo bat eskeintzen digu, zein karga-banaketaren simetria propietateetan oinarritzen den. Karga-banaketak simetriarik badu, Gaussen legeak asko erraztuko digu karga-banaketak sortzen duen eremuaren kalkulua.

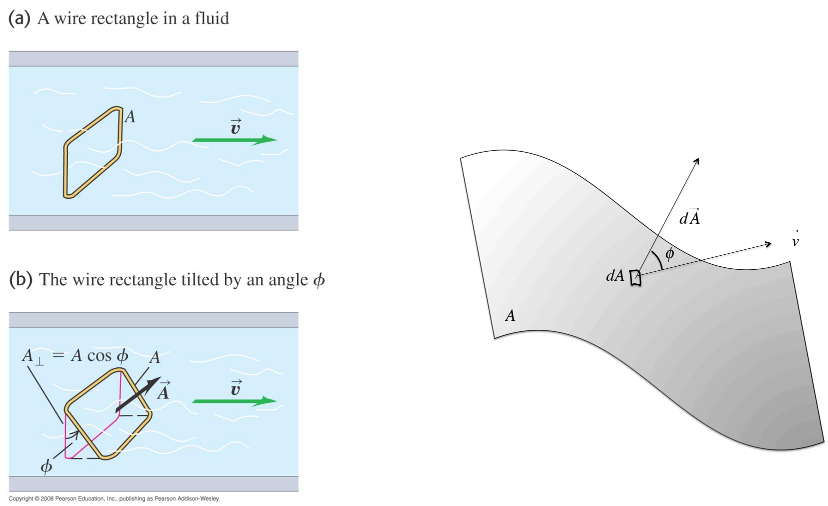
Ikusiko dugunez, Gaussen legearen oinarrian fluxu elektrikoaren kontzeptua dago.

4.1 Fluido baten fluxua

Flux elektrikoaren kontzeptua fluidoen mekanikan definitzen den fluxutik eratorritakoa da. Demagun $\vec{v}$ abiaduraz dugun fluidoa dugula 11 irudian bezala eta A azalera duen hari karratu bat hartzen dugula. Hariak definitzen duen azaleratik igarotzen den fluxua denbora unitateko azalera zeharkatzen duen fluido bolumena da.

Fluxua nola kalkulatuzen den azaldu aurretik definitu dezagun azalera-bektorea. A azalera duen gainazal laun baten $\vec{A}$ azalera-bektorearen modulua A azalera bera da eta bere norabidea gainazalarekiko perpendikularra. Gainazala leuna ez bada, hau da, kurbatua bada, ezin da gainazalari dagokion azalera-bektore orokor bat definitu puntuz-puntu norabide perpendikularra desberdina delako. Ordea, bai definitu daiteke $d\vec{A}$ azalera-bektore diferentziala (ikusi 11 irudiko eskuin aldea). $d\vec{A}$ bektorearen modulua dA azalera infinitesimala da eta bere norabidea azalera infinitesimalarekiko perpendikularra.

Azalera-bektorea definitu ostean argi ikusten da 11 irudiko ezkerraldean be-



Irudia 11: (Ezker aldean) $\vec{v}$ abiaduraz doan fluidoa dugu eta A azalera duen alanbre karratua zeharkatzen du. Alanbrea zeharkatzen duen fluxua $\Phi_f = \vec{v}\cdot\vec{A}$ da. (Eskuin aldean) $d\vec{A}$ azalera elementu infinitesimaletik igarotzen den fluxu infinitesimala $d\Phi_f = \vec{v}\cdot d\vec{A}$ da.

zala hari karratutik pasatzen den fluxua edo denbora unitateko fluido bolumena

$$\Phi_f = \vec{v}\cdot\vec{A} = vA\cos\phi \tag{34}$$

dela, non ϕ biadura-bektorearen eta azalera-bektorearen arteko angelua den. $\vec{A}$ eta $\vec{v}$ bektoreak paraleloak direnean fluxua maximoa izango da eta perpendikularrak direnean fluxua nulua.

11 irudiko eskuin aldean bezala gainazala kurbatua denean, $d\vec{A}$ elementua zeharkatuko duen fluxu infinitesimala

$$d\Phi_f = \vec{v}\cdot d\vec{A} \tag{35}$$

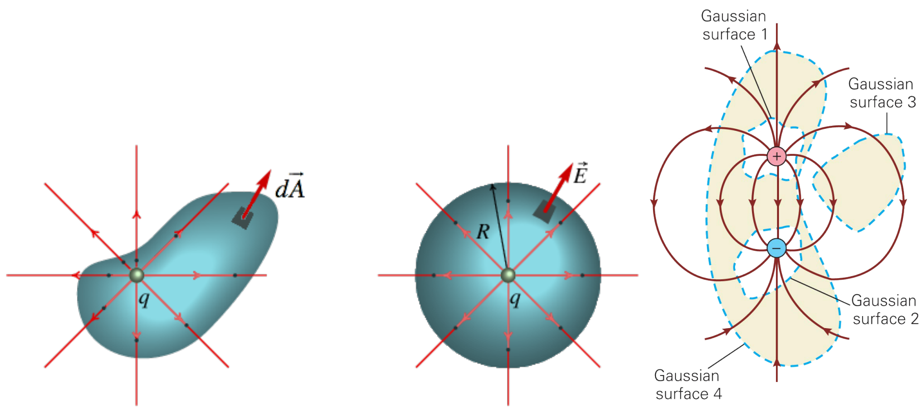
izango da. Gainazal osoa zeharkatzen duen fluxu osoa kalkulatzeko fluxu infinitesimala gainazal osora integratu behar dugu:

$$\Phi_f = \iint_A d\Phi_f = \iint_A \vec{v}\cdot d\vec{A}. \tag{36}$$

4.2 Fluxu elektrikoa eta gainazal gaussiarrak

Gainazal bat zeharkatzen duen fluxu elektrikoa gainazala zeharkatzen duen eremu-lerro kopurua bezala definitzen da. Hau kalkulatzeko

$$\Phi_E = \iint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} \tag{37}$$



Irudia 12: (Ezker aldean eta erdian) Karga puntual batek sortzen duen eremu elektrikoa eta hau irudikatzen duten eremu-lerroak. Ezkerreko eta erdiko irudian aukeratutako gainazal gaussiarrak (itxiak) desberdinak izan arren, fluxua berdina da bietan. (Eskuin aldean) Karga positibo eta negatibo bikote batek (dipolo batek) sorten duen eremua eremu-lerroen bitartez irudikatuta. Gainazal gaussiar desberdinak erakusten dira.

integrala egin behar dugu. Ikusten dugunez fluxu elektrikoa fluido baten fluxuaren guztiz analogoa da abiadura-bektorea eremu elektrikoarekin ordezkatzen badugu. Fluxua kalkulatzeko erabiltzen dugun gainazala itxia bada, gaizanal integralari borobiltxo bat ipiniko diogu:

$$\Phi_E = \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}. \tag{38}$$

Gainazal itxiei gainazal gaussiar deritze.

Gainazal gaussiarrar bat zeharkatzen duen fluxu elektrikoak propietate berezi batzuk ditu:

- **Edozein gainazal gaussiar zeharkatzen duen fluxua berdina da karga kopuru berdina inguratzen badu barnean**. Horren adibide dira 12 irudiko ezker eta erdiko irudiak. Bi gainazal gaussiar desberdin ditugu, baina biek karga puntual berdina inguratzen dute. Gainazal biak zeharkatzen dituzten eremu-lerro kopurua berdina denez, fluxu elektrikoa berdina da bi gainazaletan.

- **Gainazal gaussiar bateko fluxua barnean duen kargaren araberakoa da**. 12 irudiko eskuin aldean ikusten denez, gainazal gaussiar batek inguratzen duen karga totala nulua bada edo ez badu kargarik inguratzen, gainazalatik sartu eta ateratzen diren eremu-lerro kopurua berdina da eta, ondorioz, fluxu elektriko totala nulua da. Bestetik, karga positiboa edo negatiboa inguratzen badu gainazal gaussiarrak sartu eta ateratzen diren eremu-lerro kopurua ez da berdina eta fluxua ez da nulua.

Gainazal gaussiar batean sartu eta ateratzen diren eremu-lerroek, hurrenez hurren, fluxuan ekarpen positiboa eta negatiboa dutela ulertzeko azaldu behar dugu gainazal itxi batean $d\vec{A}$ bektoreak beti gainazalarekiko kanporanzko noranzkoa duela (ikusi 12 irudiko ezker aldea). Ondorioz, gainazaleko puntu batean eremu-lerroak gainzaletik irteten badira $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ biderkadura eskalarraren ekarpena positiboa izango da, baina puntu horretan eremu-lerroak sartu egiten badira $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ biderkadura eskalarra negatiboa izango da.

Kalkula dezagun orain $+q$ karga puntual batek sortzen duen fluxu elektrikoa. Lehen aipatu bezala, karga puntuala inguratzen duen edozein gainazal itxik fluxu berdina emango badigu ere (38) ekuazioko integralaren kalkulua erraztuko digun gainazal bat aukeratzea komeni da. 12 irudiko erdialdean erakusten den moduan R erradioko esfera bat aukeratzen badugu gainazal gaussiar bezala, esferako puntu guztietan eremu elektrikoaren modulua berdina da, $E = q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$, eta bere norabidea gainazalarekiko perpendikularra da kanporanzko noranzkoan. Beraz,

$$\Phi_E = \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oiint_A E dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \oiint_A dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} A = \frac{q}{\epsilon_0}. \qquad (39)$$

Nolabait, emaitza honek iradokitzen du fluxuak soilik gainazal gaussiarrak barnean duen kargaren araberakoa dela. Beste edozein gainazal hartu izan bagenu ere emaitza berdina izango zen, baina kalkulua konplikatuagoa.

4.3 Gaussen legearen formulazioa eta adibideak

Gainazal gaussiaren fluxua nolakoa den aztertuta, Gaussen legea formulatzeko moduan gaude. Gainazal gaussiar batetik zehar dugun fluxua gainazalaren barnean dugun Q_{barne} kargaren proportzionala da:

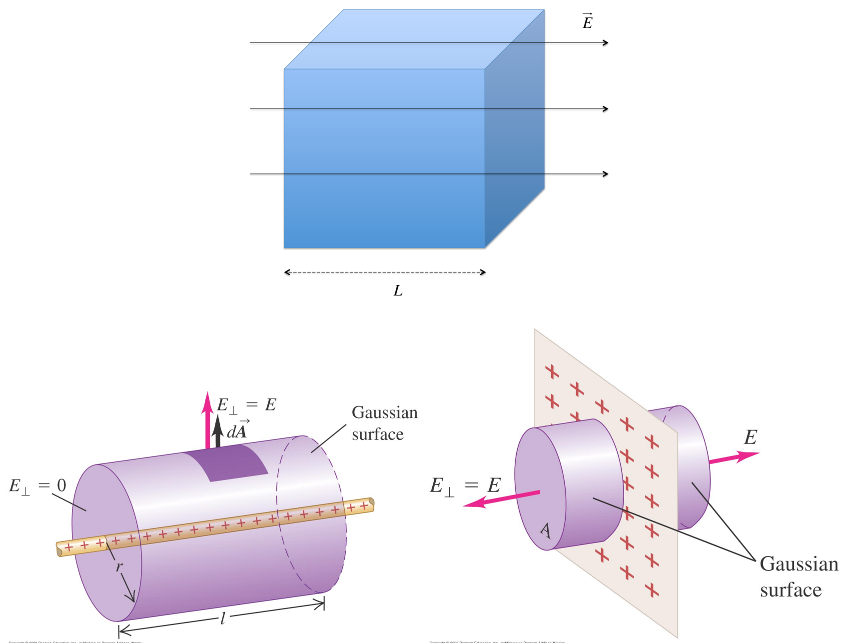
$$\Phi_E = \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{barne}}{\epsilon_0}. \qquad (40)$$

Gaussen legeak ez du soilik fluxu elektrikoa kalkulatzeko balio, ondorengo adibideetan ikusiko dugun moduan, simetria dugunean Coulomben legearen alternatiba da.

Adibidea: Karga puntualak sortzen duen eremu elektrikoa.

12 irudiko erdialdean erakusten den bezala karga puntual batek sortzen duen eremua kalkulatu nahi dugu Gaussen legea erabiliz. Simetriagatik badakigu karga puntualetik r distantziara eremu elektrikoaren modulua berdina izango dela. Bestetik, badakigu ere simetriagatik eremuaren norabidea erradiala izango dela. Matematikoki hau honela adierazi daiteke $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$. Hau honela izanik, (40) ekuazioko integrala egiteko esfera bat hartzea komeni zaigu. Honela, $\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = E(r)dA$ izango baita. Beraz,

$$\Phi_E = \oiint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \oiint_A E(r)dA = E(r) \oiint_A dA = E(r)A = E(r)4\pi r^2$$



Irudia 13: (Goian) L aldea duen kuboa zeharkatzen duen $\vec{E}$ eremu elektriko konstantea. (Behean ezkerrean) Karga-dentsitate uniformea duen hagatxo infinitoak sortzen duen eremu elektrikoaren kalkulua Gaussen legearen bidez. (Behean eskuinean) Karga-denstitate uniformea duen xafla batek sortzen duen eremu elektrikoaren kalkulua Gaussen legearen bidez.

eta, ondorioz,

$$\Phi_E = \frac{Q_{barne}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} = E(r)4\pi r^2 \rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

Norabidea erradiala dela dakigunez

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \tag{41}$$

idatz dezakegu, ezaguna genuen emaitza berreskuratuz.

Adibidea: $\vec{E}$ eremu elektriko konstantea zeharkatzen duen kuboaren gaineko fluxua.

13 irudiko goiko aldean ikusten den moduan $\vec{E}$ eremu konstantea dugun espazio alde bat dugu eta L aldea duen kubo bat zeharkatzen duen fluxua nahi dugu kalkulatu. Gaussen legeak zuzenean esaten digu kuboaren barnean kargarik ez dagoenez fluxuak nulua izan behar duela. Ikus dezagun fluxuaren kalkulu

zuzen batek ere balio nulua ematen duela:

$$\Phi_E = \oiint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \iint_{A_1} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} + \cdots + \iint_{A_6} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = -EL^2 + EL^2 = 0.$$

Fluxua kalkulatzeko erabili dugu fluxuan ekarpena soilik eremuarekiko paralelo eta antiparalelo diren bi tapek dutela.

Adibidea: λ karga-dentsitate uniformea duen hagatxo infinituak sortzen duen eremua.

13 irudian behean ezkerretan erakusten da nola kalkulatu behar den eremu elektrikoa Gaussen legea erabiliz. Simetriaz badakigu eremu elektrikoaren modulua hagatxotik r distantziara dagoen edozein puntutan berdina eta bere norabidea hagatxoarekiko erradiala izango dela. Hori dela eta gainazal gaussiar bezala zilindro bat hartzea komeni da, zeinek r erradioa eta l luzera duen. Fluxua kalkulatzean zilindoraren gorputzak soilik izango du ekarpena, tapetan $\vec{E}$ eta $d\vec{A}$ bektoreak elkartzutak direlako. Bestetik, gainazal gaussiarrak barnean duen karga $Q_{barne} = \lambda l$ da. Beraz,

$$\begin{aligned}
\Phi_E &= \oiint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \iint_{gorputz} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = E(r) \iint_{gorputz} dA \\
&= E(r) 2\pi r l \\
\Phi_E &= \frac{Q_{barne}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} = E(r) 2\pi r l \\
E(r) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.
\end{aligned}$$

Eremua hagatxoarekiko erradiala denez,

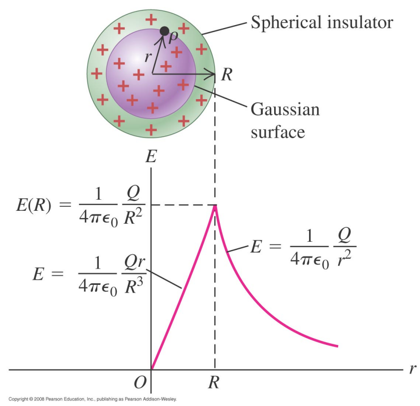
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} \tag{42}$$

moduan idatzi dezakegu, Coulomben legearekin lortutako emaitza bera.

Adibidea: σ karga-dentsitate uniformea duen xafla infinituak sortzen duen eremua.

σ karga-dentsitate uniformea duen xaflak sortzen duen eremu elektrikoa kalkulatzeko 13 irudian behean eskuinean agertzen den zilindroa aukeratzea da egokia. Orain zilindroaren gorputzeko edozein puntutan simetriagatik badakigu $\vec{E}$ eta $d\vec{A}$ bektoreak perpendikularrak izango direla eta gorputzak ez duela ekarpenik izango fluxuaren kalkuluan. Ordea bi tapetan $\vec{E}$ eta $d\vec{A}$ bektoreak paraleloak dira. Gainazal honek barnean duen karga $Q_{barne} = \sigma A_{tapa}$ da, A_{tapa} taparen azalera izanik. Beraz,

$$\begin{aligned}
\Phi_E &= \oiint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = 2 \iint_{tapa} E dA = 2EA_{tapa} \\
\Phi_E &= \frac{Q_{barne}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A_{tapa}}{\epsilon_0} = 2EA_{tapa} \\
E &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0},
\end{aligned}$$



Irudia 14: R erradioa eta Q karga totala bolumenean uniformeki banatuta duen esferak sortzen duen eremuaren kalkulua. Esferaren zentrotik neurtutako r distantziaren funtzioan eremuak duen menpekotasuna irudikatzen da ere.

honezkero ezaguna genuen emaitza.

Adibidea: Q karga bolumen osoan uniformeki banatuta duen R erradioko esfera isolatzaileak sortzen duen eremu elektrikoa.

Kasu honetan kalkulua egiteko gainazal gaussiar bezala esfera bat hartzea komeni da ere (ikusi 14 irudia). Izan ere, simetriaz badakigu espazioko edozein inguruan eremua erradiala izango dela, hau da, esferaren zentrotik $\hat{r}$ norabidea izango duela, eta esferaren zentrotik r distantziara eremuaren moduluak berdina izan behar duela. Ondorioz

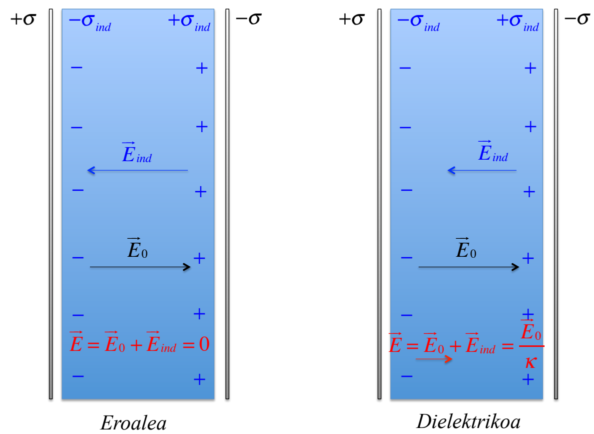
$$\Phi_E = \oiint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \oiint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = E(r) 4\pi r^2$$

izango da fluxua r erradioko esfera bat hartzen badugu gainazal gaussiar bezala. Gaussen legea aplikatzeko behar dugun barne karga ordea desberdina izango da gainazal gaussiar esferikoa esferaren barnean ($r < R$) edo kanpoan ($r > R$) kokatzen badugu. $r > R$ denean $Q_{barne} = Q$ izango da, baina $r < R$ denean barne karga aldatuko da gainazal gaussiarraren erradioaren arabera. Karga uniformeki banatuta dagoenez, $\rho = Q/(4/3\pi R^3)$ karga-dentsitatea erabili dezakegu barne-karga kalkulatzeko:

$$Q_{barne} = \rho V_A$$

non V_A gainazal gaussiarrak barnean duen bolumena baiten. Honela

$$Q_{barne} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}.$$



Irudia 15: Karga-dentsitate aurkakoa duten bi plaka paralelo eta infinituren artean eroale edo dielektriko bat jartzen denean barneko barneko eremua nola aldatzen den.

Ondorioz, Gaussen legea aplikatuz,

$$
\begin{aligned}
r < R: \qquad E(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3} \\
r > R: \qquad E(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}
\end{aligned}
$$

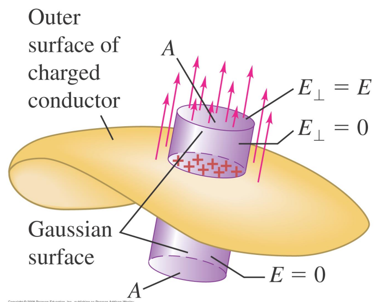
da eremu elektrikoa. 14 irudian erakusten da zein den $E(r)$ funtzioaren menpekotasuna r-rekiko.

5 Materialen portaera eremu elektriko baten eraginpean

Material bat eremu elektriko baten eraginpean kokatzen badugu erantzun egingo du. Izan ere, material batek elektroiak eta protoiak ditu barnean eta hauei eragingo die kanpoko eremu elektrikoak. Material bateko kargen izaerak zehaztuko du nola erantzuten dion material batek kanpoko eremu elektriko bati.

5.1 Eroaleak

Eroaleak diren materialek elektroi askeak dituzte, materialetik hara eta hona higi daitezkeenak. Orekan dagoen eroale bat $\vec{E}_0$ kanpoko eremu elektriko baten eraginpean kokatzen badugu, oreka hautsi eta elektroiak $\vec{E}_0$ eremuaren ondorioz



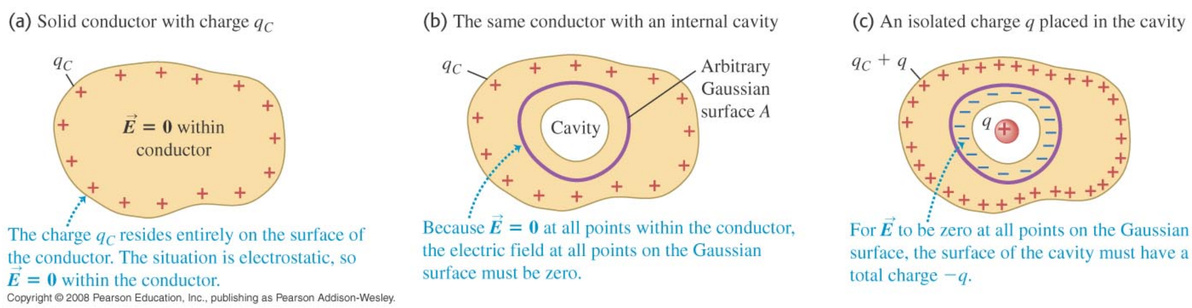
Irudia 16: Kargatua dagoen eroale batean eremu elektrikoa gainazalarekiko perpendikularra da.

higitzen hasiko dira, eroalearen ertzetan pilatuz. Honela, karga negatiboa metatuz joango da ertz batean eta positiboa bestean, elektroiek utzitako hutsunea dela eta. Gainazaletan metatutako Q_{ind} karga induzitua edo σ_{ind} karga-dentsitate induzitua metatzen hasten den heinean induzitutako eremu elektriko bat sortuko da, $\vec{E}_{ind}$, zeinek kontra egingo dion kanpoko $\vec{E}_0$ eremuari. Elektroiak askeak direnez, gainazalean metatzen jarraituko dute $\vec{E}_{ind}$ handituz, baina hau moduluz kanpoko eremuaren berdina egiten denean eta beraz $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{ind}$ eremu totala nulua egiten denean, karga metaketa eten egingo da elektroiek ez dutelako indarrik jasango. Egoera honetan eroalea berriz ere orekan egongo da eta bere barneko eremu elektrikoa nulua izango da. 15 irudian erakusten da nola induzituko den gainazalean karga eta nola anulatzen den eremua barnean karga-dentsitate aurkakoa duten bi plaka paralelo eta infiniturren artean kokatzean eroale bat.

Laburbilduz, orekan dagoen eroale baten barruan eremua nulua izango da beti. Eremua nulua bada eroale baten barnean, eroalearen barneko edozein gainazal gaussiar zeharkatzen duen fluxua ere nulua izango da. Gaussen legeak argi erakusten du ondorioz **eroale baten barnean karga nulua dela eta karga soilik gainazalean metatu daitekeela**.

Beraz, orekan dagoen eroale batek karga baldin badu gainazalean izan behar du. Karga honek eremu bat sortuko du, baina derrigor gainazalarekiko perpendikularra izan behar du honek, 16 irudian erakutsi bezala. Gainazalarekiko osagai tangentzial bat balu eremuak elektroiak mugituko lirateke gainazaletik eta ez genuke orekarik izango. Gainazaleko puntu batean eremuaren modulua zein den jakin nahi badugu har dezagun zilindrikoa den gainazal gaussiar txiki-txiki bat 16 irudian bezala. Gaussen legea aplikatuz ikusten dugu gainazala zeharkatzen duen fluxua zilindroaren goiko tapari dagokiola eta beraz $\Phi_E = EA$ dela, non A zilindroaren taparen azalera baiten. Bestalde, barne-karga $Q_{barne} = \sigma A$ izango da, σ gainazaleko puntu horretako karga-dentsitatea izanik. Hau dela eta, eroalearen gainazalean eremua

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{43}$$



Irudia 17: Orekan dagoen eroale batean barne eremua nulua izateko barne-karga moldatu egiten da, hots, eroaleari zulo bat egin eta bertan $+q$ karga ipiniz gero.

da.

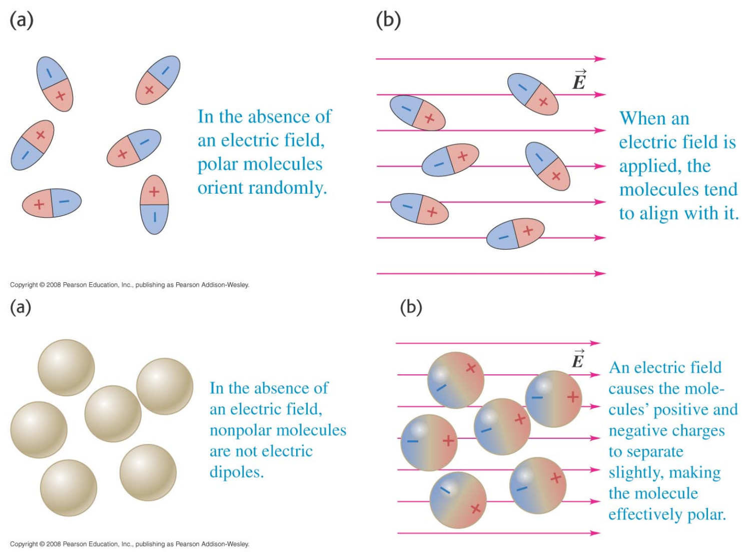
Adibidea:

17 irudian q_C karga totala duen eroalea aurkezten da, zeinen barnean eremua nulua den. Eroale berdinari zulo bat egiten bazaio karga banaketa ez da aldatzen eroalearen barnean, baina zuloan $+q$ karga jartzen badugu eroalean karga banaketa aldatuko da, barne-gainazalean karga negatiboa metatuz. Honela, eroaleak oreka elektrostatikoa lortzen duenean eremua nulua izango da barnean. Honek esan nahi du barne-gainazalean induzituko den karga totala $-q$-ren berdina izan behar dela. Era berean, kanpo-gainazelean orain $q_C + q$ karga totala egongo da, beste gainazalean metatu diren karga negatiboek $+q$ karga gehigarria utzi baitute kanpoko gainazalean.

5.2 Dielektrikoak

Material dielektrikoetan ez dago elektroi askerik eta, ondorioz, ez dute korronte elektrikoa garraitzen. Isolatzaileak dira. Ordea, material dielektrikoak kargak dituzten molekulez osaturik daudenez, kanpo eremu elektriko baten eraginpean material dielektrikoek erantzuten dute. 18 irudian erakusten den bezala molekularra polarrak orientatu egiten dira kanpoko eremu baten eraginpean eta molekularra ez polarretan kargak induzitu egiten dira.

Kanpoko eremuak material dielektriko batean duen eragina gainazalean kargak induzitzea da, azken batean, molekuletan induzitutako kargen orientazioa konpentsatu egiten baita dielektrikoaren barnean baina ez gainazalean. Beraz, 15 irudiko egoera dugu, non gainazalean σ_{ind} karga-dentsitatea induzitu den kanpoko $\vec{E}_0$ eremuaren ondorioz. Induzitutako karga-dentsitate honek, eroleetan bezala eremu elektriko induzitu bat sortuko du $\vec{E}_{ind}$, zeinek kanpoko eremuari kontra egingo dion. Dielektrikoek karga askeak ez dituztenez ezin dute karga gainazalean metatu barnean eremua anulatu arte, gainazalean metatu dezaketen karga kantitatea material dielektrikoaren ezaugarri mikroskopikoen



Irudia 18: (Goian) Material dielektriko bat molekula polarrez osatuta badago, hauek zoriz orientatuak daude. Baina eremu elektriko bat aplikatzen bazaio molekulak orientatu egiten dira materialaren gainazalean kargak induzituz. (Behean) Material dielektrikoa molekularra ez polarrez osatuta badago eta eremu elektriko baten eraginpean ipintzen bada, molekulak polarizatu egiten dira materialaren gainazaletan kargak induzituz.

araberakoa baita. Edonola ere, eremu elektrikoa dielektrikoaren barnean txikitu egiten da induzitutako eremu elektrikoaren ondorioz:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{ind} = \frac{\vec{E}_0}{\kappa}. \tag{44}$$

κ konstanteari konstante dielektriko deritzo eta dielektrikoaren eraginez eremu elektrikoa zenbat txikitzen den neurtzen du. Hau zenbaki positiboa eta bat baino handiagoa da beti. Material bakoitzaren konstante dielektrikoa desberdina da bere ezaugarri mikroskopikoen araberakoa baita hau. Hutsa badugu noski $\kappa = 1$ dugu. Konstante dielektrikoa adierazteko ϵ_r erabiltzen da ere.

15 irudiko egoera aztertzea egokia da ulertzeko zein den induzitutako karga-dentsitatea dielektriko batean. σ karga-dentsitateko bi xafla paraleloren artean kokatu dugu bertan dielektrikoa. Kanpoko eremua bi xafla hauek sortzen dutena da, $E_0 = \sigma/\epsilon_0$. Bestetik, induzitutako karga dentsitateak sortzen duen eremu induzitua ere bi xaflek sortzen dutena dela kontsideratu dezakegu, $E_{ind} = \sigma_{ind}/\epsilon_0$, zein aurkako noranzkokoa den. Honela,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{ind} = \frac{\vec{E}_0}{\kappa} \rightarrow \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_{ind}}{\epsilon_0}\right)\hat{u}_x = \frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0}\hat{u}_x, \tag{45}$$

non $\vec{E}_0\ \hat{u}_x$ norabide positiboko bektorea dela onartu dugun. Beraz, induzitutako karga-dentsitatea

$$\sigma_{ind} = \sigma \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \tag{46}$$

da. Ikusten dugu dielektrikoan induzitutako karga-dentsitatea kanpoko xafletako karga-dentsitatea baino txikiagoa dela.

Dielektrikoa beharrean eroale bat izango bagenu, eroalearen barnean eremua nulua izateko $\sigma_{ind} = \sigma$ izan behar da. Horregatik, eroale bat $\kappa = \infty$ duen dielektrikoa dela esan daiteke.

5.2.1 Gaussen legea dielektrikoetan

Dielektriko batean Gaussen legea aplikatzen dugunean (40) ekuazioa erabiliz, Q_{barne} osoa kontuan hartu behar dugu, hau da, karga askearen eta induzituaren batura dena. (46) ekuazioan azalera biderkatzen badugu alde bietan ikus dezakegu

$$Q_{barne} = Q - Q_{ind} = \frac{Q}{\kappa} \tag{47}$$

dela, non Q karga askea den, ez induzitutakoa. Beraz, Gaussen legea honela berridatzi dezakegu dielektriko batentzako:

$$\Phi_E = \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{barne}}{\epsilon_0} = \frac{Q - Q_{ind}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\kappa\epsilon_0}. \tag{48}$$

Material jakin baten permitibitate dielektrikoa

$$\epsilon = \kappa\epsilon_0 \tag{49}$$

bezala definituz, Gaussen legea honela gelditzen zaigu:

$$\Phi_E = \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon}, \tag{50}$$

Q karga askea izanik.

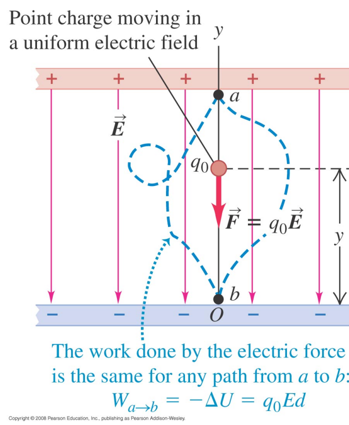
(48) ekuazioa idatzi dugunean suposatu dugu fluxua kalkulatzeko erabilitako gainazal gaussiarrak beti dielektriko bakarra inguratzen duela. Hala ez balitz eta dielektriko desberdinak zeharkatuko balitu κ integralean sartu beharko dugu:

$$\oiint_A \kappa\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{51}$$

6 Energia potentzial elektrikoa

Indar grabitatorioa kontserbakorra den bezala, Coulomben indar elektrikoa ere kontsernakorra da. Ondorioz:

- Energia potentzial elektriko bat definitu daiteke, U bezala izendatuko duguna.



Irudia 19: $\vec{E}$ eremu konstantean q_0 karga A-tik B-ra eramateko $\vec{F}$ indar elektrikoak egindako lana ibilbidearen independentea da.

- $\vec{F}$ indar elektrikoak karga bat A-tik B-ra eramateko egiten duen lana energia potentzialaren aldakuntzaren aurkakoa izango da:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\Delta U = -(U_B - U_A). \tag{52}$$

  Kontserbakorra denez ere, karga A-tik B-ra eramateko indar elektrikoak egingo duen lana ibilbidearen independentea izango da eta soilik hasierako eta amaierako puntuen araberakoa izango da, (52) ekuazioak erakusten duen moduan.

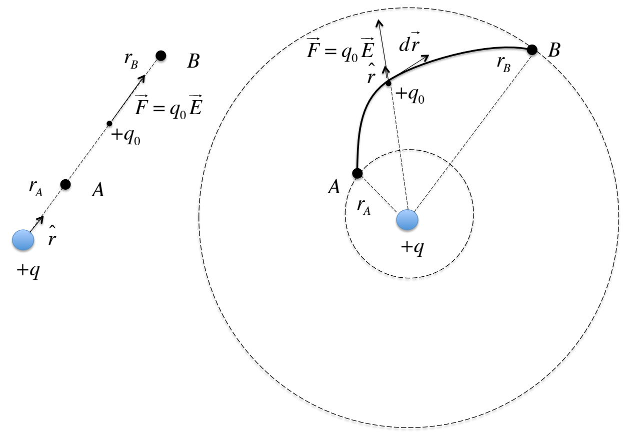
- Sistemako indar bakarra indar elektrikoa bada edo eragiten duten beste indarrak kontserbakorrak badira, energia mekanikoa kontserbatuko da.

Adibidea: Energia potentzial elektrikoa eremu konstante batean.

19 irudian bezala, q_0 karga A puntutik B puntura eraman nahi dugu. Espazioaldean $\vec{E}$ eremu elektriko konstantea dago. Indar elektrikoak egingo duen lana

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B q_0\vec{E}\cdot d\vec{r} = -q_0 E\int_A^B dy = -q_0E(y_B - y_A) = q_0Ed$$

izango da. Kalkulua egiteko eremua $\vec{E} = -E\hat{u}_y$ dela eta desplazamendu bektore orokorra $d\vec{r} = dx\hat{u}_x + dy\hat{u}_y + dz\hat{u}_z$ bezala idatz daitekeela erabili dugu. Honela $\vec{E}\cdot d\vec{r} = -Edy$. Azken batean integratu behar duguna $\int_A^B dy$ denez eta honek soilik bukaera eta hasierako y balioen araberakoa denez, indar elektrikoak egiten duen lana independentea da ibilbidearekiko, soilik hasiera eta bukaerako posizioen araberakoa da. Indar elektrikoa kontserbakorra dela ikusten dugu.



Irudia 20: q_0 karga A-tik B-ra eramateko indar elektrikoak egiten duen lana r_A eta r_B distantzia erradialen araberakoa da soilik.

Esan dugun moduan indar elektrikoa kontserbakorra denez, egiten duen lana $-(U_B - U_A)$ bezala idatz daiteke. Adibide honetan

$$U = q_0 E y$$

dela argi dago. Hori da kasu honetan izango dugun energia potentzial elektrikoa, zein y-ren arabera aldatuko den.

q_0 karga positiboa izan beharrean negatiboa balitz, indar elektrikoak egingo duen lana $-q_0$ karga A-tik B-ra eramateko negatiboa izango da:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -q_0 E d$$

Ondorioz, energia potentziala

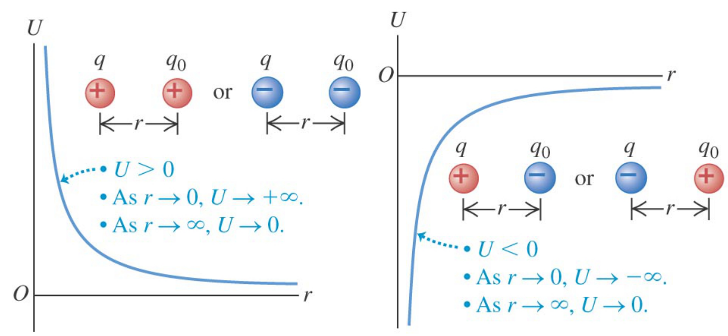
$$U = -q_0 E y$$

bezala eman behar dugu (q_0 zenbaki positiboa dela kontsideratu dugu).

Garbi dago beraz kargaren zeinuaren arabera lana positiboa edo negatiboa izango dela, baita energia potentzialarena ere.

6.1 Bi karga puntualen arteko energia potentzial elektrikoa

Azter dezagun orain bi karga puntualen arteko energia potentzial elektrikoa zein den. Hartu dezagun bi karga positibo ditugula, q eta q_0, elkarrengandik



Irudia 21: Bi karga puntualen arteko U energia potentzial elektrikoa kargen arteko r distantziaren funtzioan karga biek zeinu berdina eta aurkakoa dutenean.

r_A distantziara, 20 irudian bezala. q_0 karga r_B distantziara eramateko indar elektrikoak egingo duen lana

$$\begin{aligned} W_{A\to B} &= q_0 \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 q \int_A^B \frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 q \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 q \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 q \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \end{aligned} \tag{53}$$

izango da. Bertan erabili dugu desplazamendu infinitesimal bektorea $d\vec{r}$ bektorea $\hat{r}$ norabidean proiektatzen dugunean soilik desplazamendu inifinitesimalaren norabide erradialeko ekarpena izango dugula: dr. Ondorioz, ikusten da indar elektrikoak egiten duen lana soilik hasierako eta bukaerako distantzia erradialen funtzioa izango dela eta ez ibilbidearen araberakoa. Beraz, 20 irudiko bi ibilbideetan indar elektrikoak egindako lana berdina da. Honek konfirmatzen du berriz ere indar elektrikoa kontserbakorra dela.

Indar elektrikoa kontserbakorra denez honek egiten duen lana energia potentzialaren aldakuntzaren aurkako izan behar da, $-(U_B - U_A)$. Hau honela izanik argi ikusten da q_0 eta q karga bikotearen arteko energia potentzial elektrikoa

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0 q}{r} \tag{54}$$

dela, r kargen arteko distantzia izanik. 21 irudian erakusten da U energia potentzialaren menpekotasuna r distantziarakin. Ikusten denez, bi kargek zeinu bera badute $U > 0$ da eta U txikitzen doa r distantzia handitzean. Kargek aurkako zeinua badute $U < 0$ da eta energia potentziala handitzen da r handitzean. Irudiko menpekotasunak argi erakusten du bi kargen sistemak U energia potentziala minimoa den egorara egokitu nahi duela, edozein sistema fisikok bezala. Ikusten dugunez $U(\infty) = 0$ erreferentzia aukeratu dugu (54) ekuazioa idazterakoan.

6.2 Karga puntual sorta batek duen energia potentzial elektrikoa

Bi karga puntual izan beharrean karga puntual sorta bat baldin badugu, sistemaren energia potentziala kargak bikoteka hartuta duten energia potentzialen batura da. Hots, q_1, q_2, q_3 eta q_4 karga puntualak baditugu

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}}\right) \tag{55}$$

izango da energia potentzial elektrikoa, non r_{ij} i eta j kargen arteko distantzia den. Orokorrean n karga puntual baditugu energia potentziala

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \tag{56}$$

izango da.

Adibidea:

Suposa dezagun $q_1 = -e$ eta $q_2 = +e$ karga estatikoak ditugula x ardatzean $x_1 = 0$ eta $x_2 = a$ posizioetan. Kalkula dezagun zein den kanpo indar batek egin behar duen lana $q_3 = +e$ karga $x = +\infty$-tik abiadura konstantez $x_3 = 2a$ posiziora ekartzeko.

Karga abiadura konstantez ekartzeko, bere gaineko indar totalak nulua izan behar du. Honela, kanpo indarra q_3 kargak pairatzen duen indar elektrikoaren berdina izan behar da moduluz eta norabidez, baina aurkako noranzkokoa:

$$\vec{F}_{kanpo} = -\vec{F}_e,$$

non q_3 kargak pairatuko duen indar elektrikoa x posizioan dagoenean

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-e^2}{x^2} + \frac{e^2}{(x-a)^2}\right)\hat{u}_x$$

izango den. Kasu honetan desplazamendu infinitesimal bektorea $d\vec{r} = dx\hat{u}_x$ izango denez, kanpo-indarrak egin beharko duen lana

$$\begin{aligned}
W_{\infty\to x_3=2a} &= \int_\infty^{x_3}\vec{F}_{kanpo}\cdot d\vec{r} = -\int_\infty^{x_3}\vec{F}_e\cdot d\vec{r} \\
&= -\int_\infty^{2a}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x-a)^2}\right)dx = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}
\end{aligned}$$

da.

Ikus dezagun zenbat aldatu den sistemaren energia potentziala q_3 karga infinitotik ekartzerakoan. Karga infinitoan zegoenean

$$U = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

eta $x_3 = 2a$ posizioan dagoenean

$$U = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 2a} = -\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 2a}.$$

Beraz energia potentzialaren aldakutza,

$$\Delta U = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

izanik, q_3 karga infinitotik ekartzeko kanpo-kanpo indarrak egin behar izan duen lanaren berdina da. Honek zentzu osoa du, izan ere, indar elektrikoak egin duen lana $-\Delta U$ baita, eta kanpo-indarrak aurkako noranzkoko indarra izanagatik aurkako lana egingo baitu.

---

7 Potentzial elektrikoa

Potentzial elektrikoa karga unitateko energia potentzial elektrikoa bezala definitzen da. Beraz, q_0 froga-karga badugu potentzial elektrikoa

$$V = \frac{U}{q_0} \tag{57}$$

izango da. Antzera, puntu batean potentziala V izanik eta bertan q_0 karga bat kokatzen badugu,

$$U = q_0 V \tag{58}$$

izango da energia potentziala. Azken adibideari jarraituz, puntu bateko potentziala infinitutik puntu horretara karga unitatea abiadura konstantez ekartzeko egin behar dugun lana bezala definitu daiteke ere.

Potentzial elektrikoa sistema internazionalean Volt (V) unitateetan neurtzen da. (57) ekuazioari jarraiki

$$1V = \frac{1J}{1C}. \tag{59}$$

Arestian ikusi dugu q_0 karga A-tik B-ra eramateko indar elektrikoak egiten duen lana

$$W_{A\to B} = -\Delta U = -(U_B - U_A) = U_A - U_B \tag{60}$$

dela. Karga unitateko beharrezkoa den lana

$$\frac{W_{A\to B}}{q_0} = -\left(\frac{U_B}{q_0} - \frac{U_A}{q_0}\right) = -(V_B - V_A) = V_A - V_B = V_{AB} \tag{61}$$

da. Hau da, V_{AB} potentzial diferentzia karga positibo unitatea A-tik B-ra eramateko indar elektrikoak egin behar duen lana da.

7.1 Potentzial elktrikoaren kalkulua

Ikus dezagun ondoren nola kalkulatzen den partikula puntual batek, partikula sorta batek eta karga banaketa uniforme batek sortzen duten potentzial elektrikoa

7.1.1 Karga puntual batek sortzen duen potentzial elektrikoa

Ikusi genuenez karga bikote batek sortzen duen energia potentziala (54) ekuazioak ematen du. Ondorioz q karga puntual batek sortzen duen potentzial elektrikoa r distantziara

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \tag{62}$$

da.

7.1.2 Karga puntual multzo batek sortzen duen potentzial elektrikoa

$q_1, \cdots, q_n$ karga puntual multzoak sortzen duen potentziala P puntu orokor batean, karga indibidualek sortzen duten potentzialen batura izango da:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}, \tag{63}$$

non r_i q_i karga dagoen puntutik P puntura dagoen distantzia den.

7.1.3 Karga-banaketa jarraituek sortzen duten potentzial elektrikoa

Karga-banaketa jarraitu batek sortzen duen potentziala kalkulatzeko, dq karga infinitesimal batek sortzen duen potentzial infinitsimala kontsideratu behar dugu lehenik. Hau karga puntual batek sortzen duen potentzialaren berdina izango da, hau da,

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r}, \tag{64}$$

r karga infinitesimala dagoen puntutik potentziala kalkulatu nahi dugun P puntura dagoen distantzia izanik. Karga-banaketa jarraitu guztiak P puntuan sortzen duen potentziala kalkulatzeko dV integratu behar dugu bolumen osora:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V \frac{dq}{r}. \tag{65}$$

1D-ko karga-banaketa bat dugunean $dq = \lambda dx$ izango da (26) ekuazioan bezala λ karga-dentsitate lineala izanik. 2D-ko karga-banaketa dugunean $dq = \sigma dA$ izango da (28) ekuazioan bezala, non σ gainazaleko karga-dentsitatea den, eta 3D-ko karga banaketa dugunean $dq = \rho dV$ izango da (30) ekuazioan bezala, ρ bolumeneko karga-dentsitatea delarik.

7.2 Potentzial elektrikoaren kalkulua eremu elektrikotik abiatuz eta alderantziz

Gogora dezagun q_0 karga A-tik B-ra eramateko indar elektrikoak egin behar duen lana

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B q_0\vec{E}\cdot d\vec{r} \tag{66}$$

dela. Karga unitateko eginiko lana $W_{A\to B}/q_0 = -(V_B - V_A)$ denez (61) ekuazioan ikusi genuenez,

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} \tag{67}$$

da. (67) ekuazioak A puntuaren eta B puntuaren artean dagoen potentzial diferentzia kalkulatzeko bidea ematen digu eremu elektrikoa integratzen badugu. Beraz, eremu elektrikoa ezagutzen badugu potentzial diferentziak kalkula daitezke eremua integratuz.

Alderantzizkoa ere egia da, hau da, potentziala ezagutzen badugu eremu elektrikoa kalkula daiteke. Izan ere, indar elektrikoa kontserbakorra denez, indar elektrikoa energia potentzialaren gradientearen aurkakoa da:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U. \tag{68}$$

Adierazpen hau karga unitateko idazten badugu

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{u}_z\right) \tag{69}$$

adierazpen garrantzitsua lortzen dugu. (69) ekuazioak erakusten digu potentzialaren gradientea hartuz eremu elektrikoa lortu daitekeela.

(69) ekuazioa asko sinplifikatzen da simetria dugunean. Adibidez problema 1D-koa denean, potentzialak soilik x aldagaiarekiko du menpekotasuna, eta ondorioz

$$\vec{E} = -\frac{dV(x)}{dx}\hat{u}_x \tag{70}$$

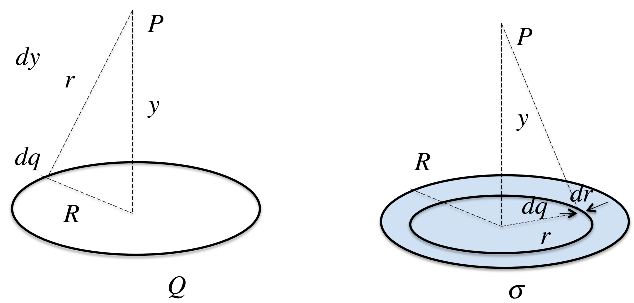
izango da. Probleman simetria esferikoa dugunean potentzialak soilik esferaren zentrotik r distantziaren menpekotasuna du. Kasu honetan

$$\vec{E} = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{r} \tag{71}$$

da, non $\hat{r}$ norabide erradiala den, esferaren zentrotik irteten den norabidea. Simetria zilindrikoa dugunean ere potentzialak soilik ardatz zilindroarekiko r distantziaren menpekotasuna du. Ondorioz,

$$\vec{E} = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{r} \tag{72}$$

da ere, baina orain $\hat{r}$ simetria ardatzetik perpendikularki ateratzen den norabidea da.



Irudia 22: (Ezkerrean) Q karga uniformeki banatuta duen R erradioko eraztunak P puntuan sortzen duen potentzialaren kalkulua. (Eskuinean) σ gainazaleko karga-dentsitate uniformea eta R erradioa duen disko batek sortzen duen potenzial elektrikoaren kalkulua P puntuan.

Adibidea:

Kalkula dezagun Q karga uniformeki banatuta duen R erradioko eraztunak bere ardatzean y distantziara dagoen P puntuan sortzen duen potentzial elektrikoa (ikusi 22 irudiko ezker aldea).

Har dezagun lehenik dq elementu txiki batek sortzen duen potentzial infinitesimala:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{R^2+y^2}}.$$

Eraztun osoak sortzen duen potentziala kalkulatzeko integratu egin behar dugu hau karga banaketa osora, hau da, eraztun osora:

$$V = \int_{eraztun} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+y^2}}\int_{eraztun} dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+y^2}}.$$

Integrala burutzeko kotuan hartu dugu eraztunaren edozein elementu infinitesimalek dV berdina sortzen duela P puntuan.

Adibidea:

Kalkula dezagun orain σ gainazaleko karga-dentsitate uniformea eta R erradioa duen disko batek ardatzean y distantziara dagoen P puntuan sortzen duen potentzial elektrikoa (ikusi 22 irudiko eskuin aldea).

Kalkulua burutzeko aurreko adibidean lortutako emaitza probestuko dugu. Izan ere r erradioa duen eraztun infinitesimalki estu bat hartu dezakegu (dr da bere zabalera) dq karga inifinitesimal elementu bezala. Aurreko adibidea ikusiz, honek sortuko duen potentzial infinitesimala

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{r^2+y^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{rdr}{\sqrt{r^2+y^2}}$$

da, non $dq = \sigma 2\pi r dr$ dela baliatu dugun. Potenzial osoa kalkulatzeko disko osora integratu behar dugu dV:

$$V = \int_{disko} dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{r^2+y^2}}.$$

Integrala egiteko aldagaia r-ra mugatu dugu, beraz. Honela

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{r^2+y^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{r^2+y^2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+y^2}-y\right)$$

da disko osoak sortzen duen potentziala.

Ikusten dugunez, diskoaren erdigunetik pasatzen den ardatz horretatik potentziala soilik y distantziaren menpekoa da. Hori dela eta, eremu elektrikoa ere dimentsio bakarrekoa izango da ardatz horretan eta soilik y distantziaren menpeko izango da ere. Dimentsio bakarreko problema dugu. (70) ekuazioa jarraituz, eremu elektrikoa ardatz horretan honela kalkulatu ahalko dugu:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dy}\hat{u}_y = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}-1\right]\hat{u}_y.$$

Honek erakusten du nola kalkulatu daitekeen eremu elektrikoa potentzialetik abiatuz.

Interesgarria da kalkulatu dugun eremuaren $R\to\infty$ limitea aztertzea. Erraz ikusten da kasu honetan eremua

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{u}_y$$

bihurtzen dela. Hau, hain zuzen ere, σ karga-dentsitatea duen plaka infinitoak sortzen duen eremua da.

Adibidea: Bi plaka infinitu kargaturen arteko potentzial elektrikoa.

Har ditzagun $+\sigma$ karga-dentsitatea eta $-\sigma$ karga-dentsitatea duten bi xafla infinitu eta paralelo 9 irudian bezala. Ikusi genuenez, plaken artean dagoen eremua konstantea da eta plakekiko perpendikularra. x baldin bada plakekiko perpendikularra den norabidea

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{u}_x$$

izango da eremu elektrikoa (x noranzko positiboa $+\sigma$ duen plakatik $-\sigma$ plakara doana hartu dugu). Kalkula dezagun plaken arteko edozein bi punturen arteko potentzial diferentzia (67) ekuazioa baliatuz:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -E \int_{x_A}^{x_B} dx = -E(x_B - x_A),$$

non x_A lehenengo puntuaren posizioa den x ardatzean eta x_B bigarren puntuaren posizioa. $x_B > x_A$ bada $V_A > V_B$ da. Honek erakusten digu eremu elektrikoa potentziala txikitzen den noranzkoan doala. Bi plaken artean dagoen potentzial diferentzia, A puntua plaka positiboa eta B puntua plaka negatiboa izanik,

$$V_B - V_A = -El$$

izango da, non l bi plaken arteko distantzia den. Modu berean, plaken artean dugun eremua

$$E = -(V_B - V_A)/l$$

izango da. Ikusten dugunez, eremua zehazteko potentzial diferentziak soilik du eragina, ez potentzialaren balio absolutuak.

7.3 Potentziala eroaleetan

Orekan dagoen eroale baten barnean $\vec{E} = 0$ da. Honek esan nahi du eroale barneko bi punturen arteko potentzial diferentzia nulua dela, hau da, eroaleko puntu guztiak potentzial elektriko berdinean daude. Hau frogatzeko har ditzagun eroale barneko edozein A eta B bi puntu eta kalkula dezagun hauen arteko potentzial diferentzia (67) ekuazioarekin:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{73}$$

eremua barnean nulua delako. Beraz,

$$V_B = V_A, \tag{74}$$

orekan dagoen eroale baten barneko puntu guztiak potentzial berdinean daude.

Adibidea:

Kalkula dezagun Q karga totala duen esfera eroaleak sortzen duen potentzial elektrikoa esferaren zentrotik edozein r distantziara.

Gaussen legea baliatuz eta eroalearen barnean eremua nulua dela jakinez, erraz kalkula daiteke eremu elektrikoa

$$\begin{aligned} \vec{E}(r) &= 0 \qquad , \quad r < R \\ \vec{E}(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \qquad , \quad r > R \end{aligned}$$

dela. Simetria esferikoa dugunez probleman, badakigu potentzial elektrikoa soilik r distantziaren menpekoa izango dela. Gainera, (71) ekuazioa jarraituz

$$V(r) = -\int E(r)dr + A$$

izango dela badakigu, non A edozein konstante den. Integrala eginez $r < R$ eta $r > R$ esparruetan

$$\begin{aligned} V(r) &= A \qquad &, \quad r < R \\ V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} + B \qquad &, \quad r > R \end{aligned}$$

dugu, non A eta B edozein konstante izanik ere (71) betetzen den. Ordea, konstante hauek zehaztu behar dira. Horretarako erreferentzia bat zehaztu ohi da potentziala non den nulua aukeratzeko. Aukeraketa hau arbitrarioa da. Hots har dezagun $V(r \to \infty) = 0$ dela. Hau honela bada

$$V(r \to \infty) = B = 0 \tag{75}$$

izan behar da. Hortaz, $B = 0$ da konstanteetako bat. Beste konstantea zehazteko inposatu behar dugu $V(r)$ **potentzialak funtzio jarraitua izan behar du**ela. Hau beti da horrela. Bestela, potentzial horretan jartzen dugun q_0 karga baten energia potentzial elektrikoa $U(r) = q_0 V(r)$ ez litzake jarraitua izango eta honek ez du zentzu fisikorik interpretazio faltsuetara eraman baikaitzake. Geure adibidean potentzialak jarraitua izateko berdina izan behar du $r = R$ puntuan. Potentzialak R puntuan jarraitua izateko $A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}$ izan behar du. Honela, geure adibideko potentziala

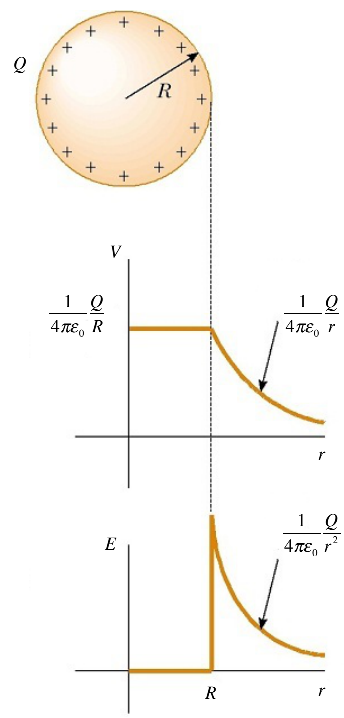
$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R} \qquad &, \quad r < R \\ V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \qquad &, \quad r > R \end{aligned}$$

da. 23 irudian erakusten dira $E(r)$ eta $V(r)$ funtzioak.

7.4 Gainazal ekipotentzialak eta eremu elektrikoa

Potentzial elektrikoa berdina duten puntuek gainazal ekipotentzial bat osatzen dute. $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ denez, matematikoki honek frogatzen du eremu elektrikoa beti perpendikularra dela gainazal ekipotentzialekiko. Gainera, eremuaren noranzko positiboa potentziala txikitzen deneko noranzkoan egongo da. Beraz, gainazal ekipotentzialak irudikatuz sistema batean eremu elektrikoa nolakoa den jakin daiteke.

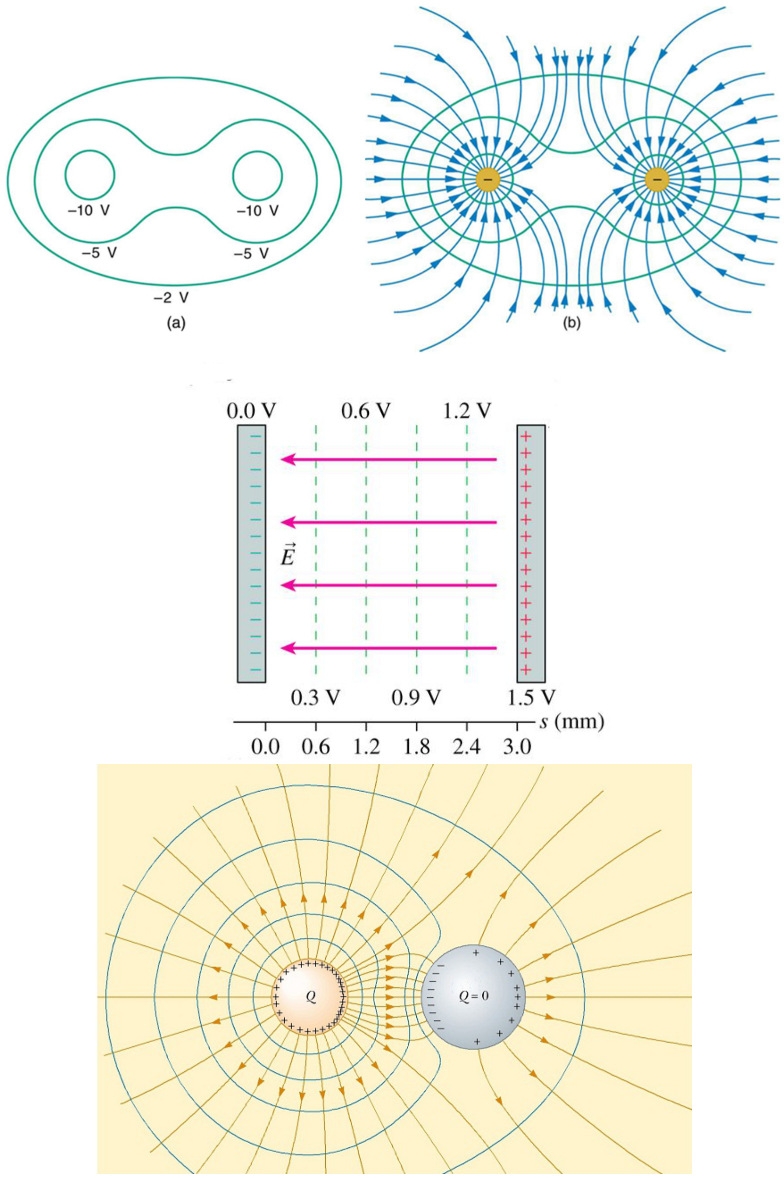
24 irudian bi karga negatibo puntualek (goian) eta karga-dentsitate aurkakoa duten bi plakek (erdian) sortzen dituzten gainazal ekipotentzialak erakusten



Irudia 23: Q karga eta R erradioa duen esfera eroale batean $E(r)$ eremu eta $V(r)$ potentzial elektrikoak esferaren erradiotik neurtutako r distantziaren funtzioan.

dira. Ikusten denez, eremua beti da gainazal ekipotentzialekiko perpendikularra eta potentziala txikitzen deneko noranzkoa du.

24 irudian behean erakusten da Q karga totala duen esfera eroale batek sortzen duen eremua eta potentziala nola aldatzen diren gertu karga totala nulua duen eroale bat jartzen denean. Ikusten den moduan eremu-lerroak eta gainazal ekipotentzialak aldatu egiten dira karga nulua duen eroalearen presentziagatik. Azken honen barnean eremuak nulua izan behar duenez bere kargak orientatu egiten dira bere barneko eremua anulatzeko irudian erakusten den bezala. Honek eremua eraldatzen du. Eroalean puntu guztietan potentziala berdina denez, **eroalearen gainazala gainazal ekipotentzial bat da**. Horrek konfirmatzen du berriro ere eremu elektrikoa beti perpendikularra dela eroalearen gainazalarekiko.



Irudia 24: Eremu-lerroak eta gainazal ekipotentzialak hiru adibide besberdinetan: goian bikarga negatiboren kasuan, erdian bi plaka kargaturen artean, behean eroale neutro baten presentzian dagoen Q karga eroalearen kasua.