

Eremu magnetikoa

Gaien Aurkibidea

1	Sarrera	1
2	Indar magnetikoa	2
2.1	Karga puntualen gaineko indar magnetikoa	2
2.2	Eremu konstante bateko higidura	3
2.3	Korronte elektrikoek gaineko indar magnetikoa	5
2.4	Espira baten gaineko indar momentua: momentu dipolar magnetikoa eta bere energia	6
2.5	Hall efektua	8
3	Fluxu magnetikoa eta Gauss-en legea magnetismorako	9
4	Eremu magnetikoen iturriak	10
4.1	Mugimenduan dagoen karga batek sortzen duen eremu magnetikoa	10
4.2	Korronte elektriko batek sortzen duen eremu magnetikoa: Biot eta Savart-en legea	13
4.3	Ampère-n legea	16

Erreferentziak

- *Física Universitaria* 13. edizioa. Sears eta Zemansky. Pearson: 27. eta 28. kapituluak
- *Fisika zientzialari eta ingeniariarentzat*. Fishbane, Gasiorowicz eta Thornton. UPV/EHU: 29. eta 30. kapituluak

1 Sarrera

Magnetismoaren oinarria eremu magnetikoa da. Ikusiko dugun bezala, eremu magnetikoak mugimenduan dauden kargei eragiten die. Era berean, mugimenduan dauden kargek eremu magnetikoa sortzen dute. Beraz, kargen mugimendua gakoa da magnetismoan. Badaude naturalki eremu magnetikoa sortzen duten materialak, hots, magnetita minerala. Bestetik, material askori eremu mag-

netiko batek eragiten die, eremu magnetikoak induzituz bertan. Teknologikoki eremu magnetikoa oso garrantzitsua da motore elektrikoetan, ordenagailuetako memoriatan eta elektrizitatea sortzeko erabiltzen baita, adibidez.

Eremu magnetikoa bektore bat da eta \vec{B} bezala adierazi ohi da. Sistema internazionalan eremu magnetikoa Tesla (T) unitatetan neurtzen da:

$$1T = \frac{1kg}{1C \ 1S}. \quad (1)$$

Eremu magnetiko bat sortzen duen edozein materialak hego polo eta ipar polo bat du. Eremu magnetikoaren eremu-lerroak ipar polotik hego polora doaz definizioz.

2 Indar magnetikoa

2.1 Karga puntualen gaineko indar magnetikoa

Eskualde batean \vec{B} eremu magnetiko bat baldin badugu eta bertan \vec{v} abidura duen q karga bat badugu, hau izango da pairatuko duen indar magnetikoa:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (2)$$

Ikusten denez, kargak indar bat pairatuko du soilik abiadura bat baldin badu. Gainera, abiaduraren eta eremu magnetikoaren arteko biderkadura bektoriala agertzen zaigunez, kargak indar magnetikoa pairatuko du abiadura eta eremu magnetikoa paraleloak ez badira. Izan ere, (2) ekuazioan agertzen zaigun biderkadura bektoriala dela eta, \vec{F}_B indar magnetikoa abiadurarekiko eta eremu magnetikoarekiko perpendikularra dela ikus dezakegu. Indarra \vec{v} -k eta \vec{B} -k osatzen duten planoarekiko perpendikularra izango da.

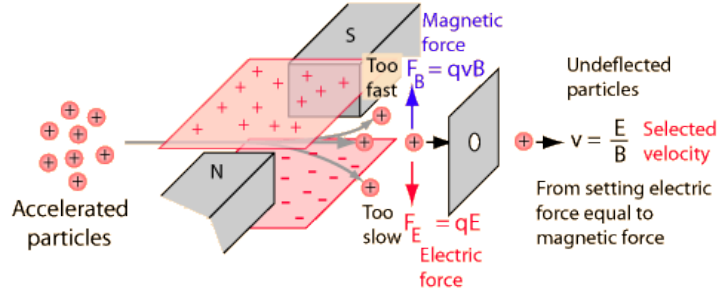
Aipatu behar da ere kargaren zeinuak eragina izango duela kargak pairatuko duen indar magnetikoan. Kargaren zeinua kontuan hartu behar da indarraren noranzkoa zehazteko, (2) ekuazioak zehaztu bezala. Karga positibo bat badugu, indarraren norabide eta noranzkoa \vec{v} eta \vec{B} -ren arteko biderkadura bektorialak zehaztuko du, baina karga negatiboa badugu noranzkoa aurkakoa izango da.

Indar magnetikoa beti denez perpendikularra abiadurarekiko, indar magnetikoak ez du lanik egiten. Indar magnetikoak egingo duen lana q karga A -tik B -ra eramateko nulua da:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}_B \cdot d\vec{r} = \int_A^B q\vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{v} dt = 0. \quad (3)$$

Desplazamendu bektore infinitesimala abiaduraren paraleloa denez, $d\vec{r} = \vec{v} dt$, eta indar magnetikoa abiaduraren perpendikularra denez, indar magnetikoa eta $d\vec{r}$ bektorea perpendikularrak dira. Ondorioz, euren arteko biderkadura eskalarra nulua da eta indar magnetikoak egiten duen lana nulua.

Karga bat \vec{E} eremu elektrikoa eta \vec{B} eremu magnetikoa ditugun eskualde batean kokatzen badugu, kargak pairatuko duen indar totala indar elektrikoaren



Irudia 1: Abiadura hautagailu baten irudia. Abiadura desberdinak dituzten q kargadun partikulak iristen zaizkigu \vec{E} eta \vec{B} eremuak ditugun eskualdera. Desbideratu gabe irtengo diren partikulen abiadura $v = E/B$ izango da.

eta magnetikoaren arteko batura izango da:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (4)$$

Indar honi **Lorentz-en indarra** deritzo.

Adibidea: Abiadura hautagailua

(1) irudian erakusten da nola sortu daitekeen abiadura hautagailu bat eremu elektriko eta magnetiko bat erabiliz. Demagun abiadura desberdinak dituzten q karga positibodun partikulak iristen zaizkigula \vec{E} eta \vec{B} eremu elektriko eta magnetikoak ditugun eskualdera. Eremuak elkarren artean perpendikularrak dira. Suposa dezagun $\vec{B} = B\hat{u}_y$, $\vec{E} = -E\hat{u}_z$ eta partikula guztien abiadurak \hat{u}_x norabide positibokoak direla. Orduan, eremuak ditugun eskualdean sartzen direnean, partikulek

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = -qE\hat{u}_z + qvB\hat{u}_z$$

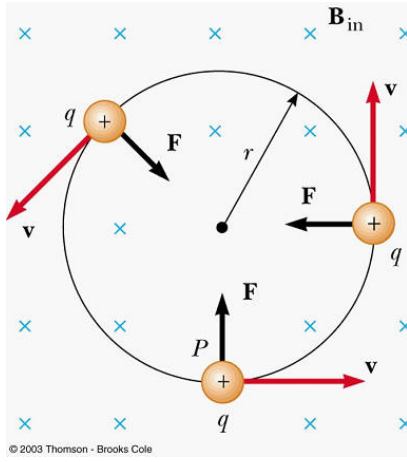
indarra pairatuko dute. Demagun zulotxo baten bitartez desbideratu ez diren partikulak hautatu nahi ditugula. Hauek, euren gaineko indarra nulua izango dutenak izango dira, hots,

$$\vec{F} = -qE\hat{u}_z + qvB\hat{u}_z = 0 \quad \rightarrow \quad v = \frac{E}{B}$$

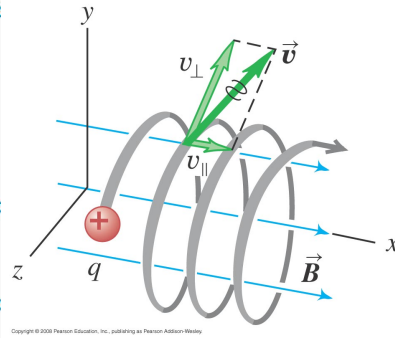
abiadura dutenak. Beraz, abiadura hautagailu honen bitartez $v = E/B$ abiadura duten partikulak hautatu ditzakegu. Eremuen balioak aldatuz lortutako partikulen abiadura aldatu ahalko dugu.

2.2 Eremu konstante bateko higidura

Azter dezagun orain nolako den eremu magnetiko konstante batean sartu egiten den m masa eta q karga duen partikula baten higidura.



This particle's motion has components both parallel (v_{\parallel}) and perpendicular (v_{\perp}) to the magnetic field, so it moves in a helical path.



Irudia 2: (Ezkerrean) \vec{v} eta \vec{B} perpendikularrak direnean kargak deskribatzen duen higidura zirkular uniformea eremu konstante batean. (Eskuinean) \vec{v} eta \vec{B} perpendikularrak ez direnean kargak deskribatzen duen higidura heliptikoa eremu konstante batean.

Lehenik suposatuko dugu kargaren abiadura eta eremu magnetikoa perpendikularrak direla 2 irudiko ezker aldean bezala. Abiadura eta eremua perpendikularrak direnez, indar magnetikoaren modulua $F_B = qvB$ izango da, zein ez den denborarekin aldatuko. Ikusten denez, indar magnetikoa indar normal bat izango da eta, ondorioz, partikulak R erradioko higidura zirkular uniforme bat deskribatuko du. Indar magnetikoak azelerazio normal bat emango digu, zeinek soilik kargaren abiaduraren norabidea aldatuko duen, ez modulua. Hau dela eta, Newton-en ekuazioaren arabera,

$$F_B = qvB = ma_n = m \frac{v^2}{R} \quad (5)$$

eta, ondorioz,

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (6)$$

izango da partikulak deskribatuko duen erradioa. Eremu magnetikoa edo karga geroz eta handiagoa erradioa txikiagoa izango da. Masa eta abiadura geroz eta handiagoa badira, ordea, erradioa ere handiagoa izango da.

Higidura zirkularra dugunez, kalkula dezagun zein izango den abiadura angeluarra eta maiztasuna:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{q}{m} B \quad (7)$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{q}{m} B. \quad (8)$$

ν maiztasunari ziklotroi-maiztasuna deritzo. Ziklotroi-maiztasuna partikularen karga eta masaren arteko zatiduraren eta eremu magnetikoaren arabera da.

Hortaz, partikula baten ziklotroi maiztasuna edo deskribatzen duen zirkunferentziaren erradioa neurtuz partikularen q/m zatidura zein den lortu dezakegu.

Demagun orain partikularen abiadura eta eremu magnetikoa ez direla perpendikularrak 2 irudiko eskuin aldean bezala. Kasu honetan abiadura bi osagaietan deskonposatu dezakegu,

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel, \quad (9)$$

non \vec{v}_\perp eremu magnetikoarekiko perpendikularra den osagaia eta \vec{v}_\parallel eremu magnetikoarekiko paraleloa den osagaia diren. Kargaren gaineko indar magnetikoa kalkulatzeko badugu

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel) \times \vec{B} = q\vec{v}_\perp \times \vec{B} + q\vec{v}_\parallel \times \vec{B} = q\vec{v}_\perp \times \vec{B} \quad (10)$$

bezala, ikusten dugu indarrean solik abiaduraren \vec{v}_\perp osagai perpendikularrak izango duela ekarpena. Honek esan nahi du, \vec{B} -rekiko perpendikularra den planoan partikulak higidura zirkular bat deskribatuko duela, zeinen erradioa

$$R = \frac{mv_\perp}{qB} \quad (11)$$

izango den, eta \vec{B} -rekiko paraleloa den norabidean aurrera jarraituko duela \vec{v}_\parallel abiadurarekin. 2 irudiko eskuin aldean adierazi bezala, higidura konposatu hau helize bat da. Helizearen erradioa neurtuz partikularen kargaren eta masaren arteko zatidura lortu daiteke. Halako neruketak erabiltzen dira, adibidez, partikula azeleragailuetan partikula berriak topatzeko.

2.3 Korrante elektrikoaren gaineko indar magnetikoa

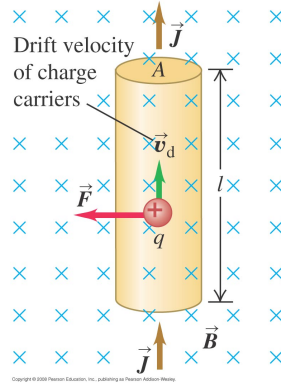
Korrante elektriko bat dugunean kargak abiadura konstantez higitzen dira, \vec{v}_d jito edo deriba abiaduraz hain zuzen. Beraz, korrante elektriko bat eremu magnetiko baten eraginpean kokatzen badugu, higitzen ari diren kargak indar bat pairatuko dute.

3 irudian erakusten da \vec{J} korrante-dentsitatea duen hari eroalea, zein \vec{B} eremu magnetikoaren eraginpean kokatu den. Korrantea daraman q karga positibodun partikula bakoitzaren gaineko indar magnetikoa

$$\vec{F} = q\vec{v}_d \times \vec{B} \quad (12)$$

da, \vec{v}_d kargen deriba abiadura izanik. Hartzen badugu dl luzera duen hari elementua, zeinen sekzioa A baiten, hari tarte horretan izango dugun indar totala, bertan dauden partikula guztien gaineko indarren batura izango da. Eremu magnetikoa konstantea bada elementu horretan, karga guztiek indar berdina jasoko dute. Hortaz, hariaren dl elementu horretan izango dugun $d\vec{F}$ indar totala (12) ekuazioako emaitza bider dl elementuan dugun partikula kopurua izango da. Bolumen unitateko dugun partikula kopurua n bada, dl elementuan izango dugun partikula kopuru totala $nAdl$ izango da. Beraz,

$$d\vec{F} = nAdlq\vec{v}_d \times \vec{B}. \quad (13)$$



Irudia 3: \vec{J} korrante-dentsitatea dugun ari eroale bat \vec{B} eremu magnetiko baten eraginpean ipintzen badugu, eroaleak indar bat pairatuko du higitzen ari diren kargak indar bat jasango dutelako.

Korrante dentsitatea $\vec{J} = nq\vec{v}_d$ dela gogoratuz, korrante elektrikoa $I = JA$ denez eta $d\vec{l} = dl\vec{J}/J$ bektorea definituz,

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} \quad (14)$$

ekuazioa lortu dezakegu. I haritik doan korrantea da, $d\vec{l}$ bektorearen modulu dl luzera infinitesimala da eta bere norabide eta noranzkoa \vec{J} korrante-dentsitatearen berdina dira.

Haria zuzena bada eta korrantea konstantea bada hariko puntu guztietan, haria \vec{B} eremu magnetiko konstantearen eraginpean jartzen badugu (14) ekuazioak diosku hariak jasango duen indar totala

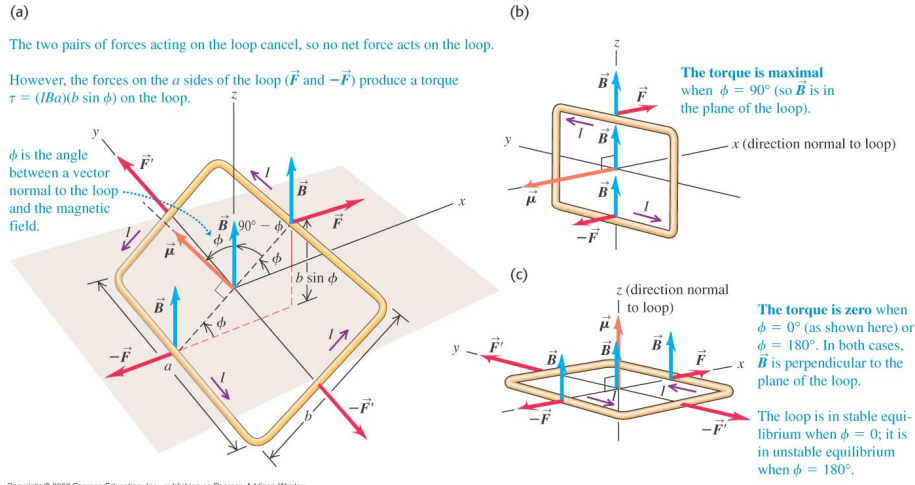
$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \quad (15)$$

izango dela. Orain \vec{l} bektorearen modulu hariaren luzera osoa da, eta norabidea eta noranzkoa berriro ere korrante-dentsitateak zehazten duena da.

2.4 Espira baten gaineko indar momentua: momentu dipolar magnetikoa eta bere energia

Kalkula dezagun orain zein den espira baten gainean eremu magnetikoak sortzen duen indarra. Espira bat korrante elektriko bat daraman hari itxi bat da. Kontsidera dezagun a eta b aldeak dituen espira karratu bat dugula, zeinak I korrantea duen 4 irudiak erakutsi bezala. 4(a) irudiko egoera hartzen badugu, (15) ekuazioa erabiliz kalkula dezagun zein den alde bakoitzaren gaineko indarra. Har dezagun $\vec{B} = B\hat{u}_z$ dela. b luzera daukaten aldeetako indarraren modulu

$$F' = |I\vec{l} \times \vec{B}| = IbB \sin(\pi/2 - \phi) = IbB \cos \phi \quad (16)$$



Irudia 4: Espira karratu bat eremu magnetiko baten eraginpean. Indar totala nulua bada ere, espiraren orientazioaren arabera indar momentua ez-nulua izan daiteke.

da, indarra alde bakoitzean norabide berdinekoa baina aurkako noranzkoko izango delarik. a luzera duten aldeetan

$$F = |I\vec{l} \times \vec{B}| = IaB \quad (17)$$

izango da indarraren modulua, indarra alde bakoitzean norabide berdinekoa baina aurkako noranzkoko izango delarik ere. Ikusten dugunez, espira osoan dugun indar totala nulua da, beraz, Newtonen ekuazioaren arabera, espiraren masa-zentroa ez da mugituko (azeleratuko).

Masa-zentroa mugituko ez bada ere, espira ez da orekan egongo, bere gaineko indar momentua nulua ez delako. b luzerako aldeetako indarrek ez dute indar momenturik sortuko, baina bai a luzerako aldeetako indarrek. Espiraren zentrotik neurtuz indar momentua

$$\vec{M} = \vec{r}_F \times \vec{F} + \vec{r}_{-F} \times (-\vec{F}) = \frac{b}{2}F \sin \phi \hat{u}_y + \frac{b}{2}F \sin \phi \hat{u}_y = Iab \sin \phi \hat{u}_y \quad (18)$$

emaitza lortzen dugu. Indar momentua nulua ez denez, honek esan nahi du espira ez dela orekan egongo eta azelerazio angeluar bat izango duela, $\vec{M} = d\vec{L}/dt$ baita.

Indar momentua modu sinpleago batean idatz daiteke $\vec{\mu}$ momentu dipolar magnetikoa definitzen badugu. A azalera eta I korronea duen espira baten momentu dipolar magnetikoa

$$\vec{\mu} = I\vec{A} \quad (19)$$

da. Momentu dipolarra bektore bat da. Bere norabide eta noranzkoko definitzeko azalera bektorearena hartzen da. Azalera bektorea espirak definitzen duen

planoarekiko perpendikularra da. Bere noranzkoa korrante elektrikoaren noranzkoak zehazten du eskuin eskuko arauaren arabera 4 irudian agertzen den bezala. Aurreko adibidean, momentu dipolar magnetikoaren modulua $\mu = Iab$ da eta ikus daiteke eremu magnetikoarekin ϕ angelua osatzen duela bektoreak. Beraz, espiraren gaineko indar momentua

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (20)$$

bezala berriatzi dezakegu. Ekuazio hau erabiliz ulertu daiteke 4(b) irudian indar momentua maximoa dela momentu dipolar magnetikoa eta eremu magnetikoa perpendikularrak direlako eta 4(c) irudian indar momentua nulua dela bi bektoreak paraleloak direlako.

Espira 4(b) egoeran kokatzen badugu, indar momentuagatik $\vec{\alpha} = \alpha \hat{u}_y$ azelerazio angeluarra izango du. Biratzen hasi ostean, momentu dipolarraren eta eremuaren arteko angelua txikituko denez, azelerazio angeluarra txikitzen joango da, 4(c) egoeran azelerazioa nulua izango den arte. Espirak biratzen jarraituko du, baina azelerazioa angeluarra orain kontrako noranzkoko izango da eta espira frenatzen joango da, 4(b) egoeraren aurkakora iritsi eta guztiz gelditzen den arte. Orduan berriro ere hasiko da biratzen baina kontrako abiadura angeluarrarekin. Egoera honetan kontserbatzen den energia bat badugula esan genezake, zeinek espiraren biraketa deskribatzen duen. Energia hori

$$U(\phi) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \phi \quad (21)$$

bezala defini daiteke. Energia hau kontserbatzen da eta espiraren higadura deskribatzeko erabili daiteke.

Azken ohar bezala aipatu beharra A azalerako sekzioan N espira baditugu kiribildutak momentu dipolar magnetikoa

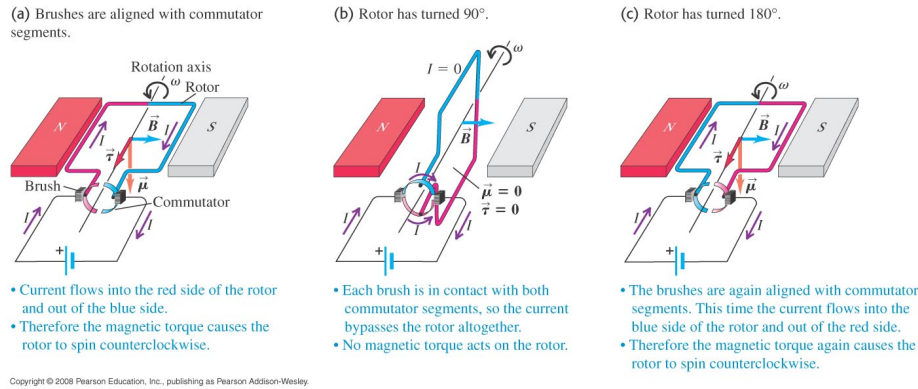
$$\vec{\mu} = NI\vec{A} \quad (22)$$

bezala kalkulatu da. Bestetik, momentu dipolar magnetikoek eremu baten eraginpean sortzen duten indar momentua korrante zuzeneko motorrak sortzeko erabili daiteke, 5 irudian erakusten den bezala.

2.5 Hall efektua

Korrante elektriko bat dugunean, ez dakigu printzipioz karga garraiatzen duten partikulak positiboak edo negatiboak diren. Izan ere, 6 irudian erakusten den bezala karga positiboak \vec{v}_d abiadurarekin badoaz edo karga negatiboak $-\vec{v}_d$ abiadurarekin badoaz $\vec{J} = nq\vec{v}_d$ korrante-dentsitate berdina izango dugu. Nola jakin karga garraitzaileak positiboak edo negatiboak diren? Horretarako Hall efektua erabili daiteke.

Demagun \vec{J} korrante-dentsitatea daraman xafla eroalea dugula 6 irudian bezala eta eremu magnetiko perpendikular bat aplikatzen dugula. Kargek indar magnetiko bat pairatuko dutenez, desbideratu egingo dira, hots, karga garraiatzaileak positibo edo negatibo direla ere goiko ertzera desbideratuko dira.



Irudia 5: Korrante zuzeneko motorea.

Kargak desbideratuko direnez, eremu elektriko bat sortuko da, baina karga garraiatzailearen zeinuaren arabera izango da potentzial diferentzia. Sortuko den eremu elektrikoa handitzen joango da ertzetan karga metatzen doan heinean. Karga metaketa eten egingo da sortuko den indar elektriko eta indar magnetikoa moduluz berdinak direnean, hots,

$$qE = qv_d B \quad (23)$$

denean. Korrante dentsitatearen $J = nqv_d$ definizioa erabiliz,

$$E = \frac{J}{nq} B \quad (24)$$

denean etengo da metaketa. Mezua zera da, eremua egonkortzen denean eta metaketa gehiago ez dagoenean, potentzial diferentzia bat egongo dela xafllaren ertzen artean. Potentzial diferentzia hau zeinuz aurkakoa izango da karga garraiatzailearen zeinuaren arabera. Beraz, potentzial diferentziaren zeinua neurtuz jakin daiteke karga positiboak edo negatiboak mugitzen ote diren.

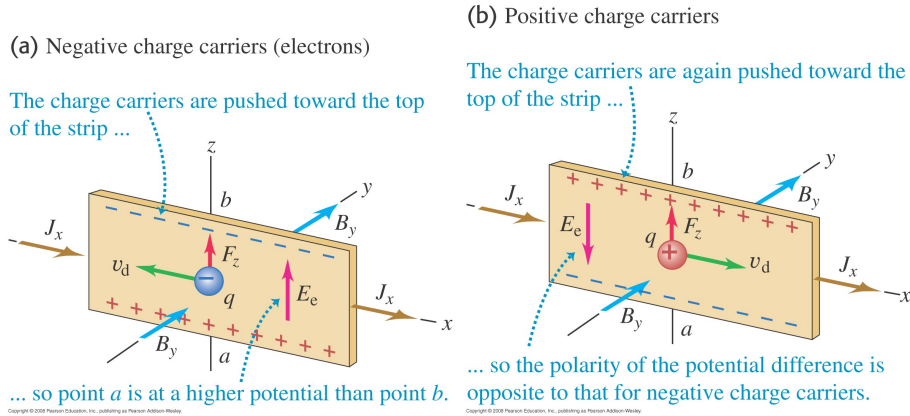
3 Fluxu magnetikoa eta Gauss-en legea magnetismorako

Fluxu magnetikoa fluxu elektriko bezala definitzen da. Hau da A gainazal bat zeharkatzen duen fluxu magnetikoa, gainazala zeharkatzen duten eremu-lerro kopurua da, eta

$$\Phi_B = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (25)$$

bezala kalkulatu daiteke. Fluxu magnetikoa Sistema internazionalen Weber (Wb) unitatetan emah ohi da:

$$1Wb = 1T \ 1m^2. \quad (26)$$



Irudia 6: Korrante-dentsitate berdina dugu bi irudietan xafla eroale batean, baina karga garraiatzen duten partikulek kasu batean karga positiboa dute eta bestean negatiboa. Xaflarekiko perpendikularra den eremu magnetiko bat aplikatuz sortuko den potentzial diferentzia aurkakoa izango da kargaren zeinuaren arabera.

Elektrostatikan ikusi genuen gainazal itxi bat zeharkatzen duen fluxu elektrikoa gainazalaren barnean dagoen kargaren proportzionala dela. Hori zen, hain zuzen, Gauss-en legea. Fluxu magnetikorako ere badugu halako lege bat, baina kasu honetan zera dio: gainazal itxi bat zeharkatzen duen fluxu magneikoa nulua da beti, hau da,

$$\oiint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (27)$$

Honen arrazoia *karga magnetiko* isolatua existitzen ez dela da. Eremu magnetiko bat sortzen duen edozein elementu iparra eta hegoa du, eta, beraz, eremu lerroak itxiak dira.

4 Eremu magnetikoen iturriak

Orain arte eremu magnetikoen mugimenduan dauden kargei eta korrante elektrikoiei nola eragiten dien deskribatu dugu. Ez dugu aipatu zerk sortzen duen eremu magnetikoa. Ikusiko dugunez mugimenduan dauden kargak edo korrante elektrikoek sortzen dute eremu magnetikoa.

4.1 Mugimenduan dagoen karga batek sortzen duen eremu magnetikoa

\vec{v} abiaduraz doan q kargadun partikulak bera dagoen puntutik neurtutako edozein $\vec{r} = r\hat{r}$ putuan eremu magnetiko bat sortuko du

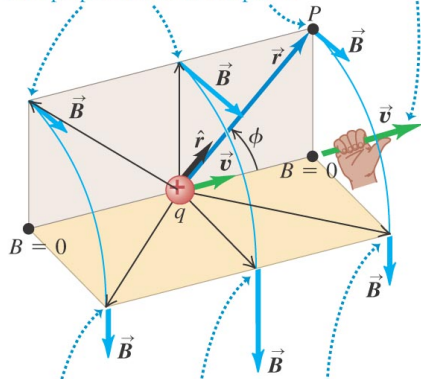
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad (28)$$

(a) Perspective view

Right-hand rule for the magnetic field due to a positive charge moving at constant velocity:

Point the thumb of your right hand in the direction of the velocity. Your fingers now curl around the charge in the direction of the magnetic field lines. (If the charge is negative, the field lines are in the opposite direction.)

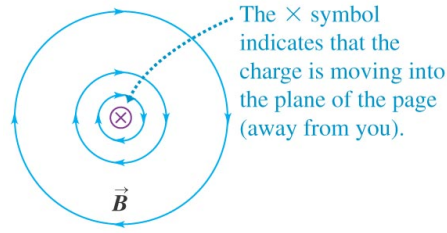
For these field points, \vec{r} and \vec{v} both lie in the beige plane, and \vec{B} is perpendicular to this plane.



For these field points, \vec{r} and \vec{v} both lie in the gold plane, and \vec{B} is perpendicular to this plane.

Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

(b) View from behind the charge



The \times symbol indicates that the charge is moving into the plane of the page (away from you).

Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

Irudia 7: (a) \vec{v} abiaturaz doan q kargadun partikulak espazioko puntu desberdinetan sortzen duen eremu magnetikoa. (b) karga berdinak sortzen dituen eremu-lerroak.

adierazpenaren arabera.

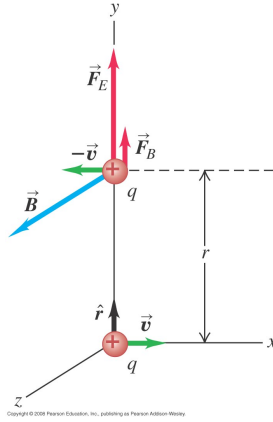
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} Tm A^{-1} \quad (29)$$

konstanteari hutsaren iragazkortasun magnetikoa deritzo.

7 irudian erakusten da nolakoa izango den mugimenduan dagoen karga positibo batek sortzen duen eremu magnetikoa. Ikusten denez eremu-lerroak zirkularrak izango dira eta eremuaren noranzkoa eskuin eskuko arauak emango digu. Kontuan hartu behar dugu karga negatiboa bada higitzen ari dena, eremuaren noranzkoa kontrakoa izango dela, ez eskuin eskuko arauak ematen duena, kontrakoa.

Adibidea:

Suposa dezagun bi protoi ditugula kontrako noranzkoan higitzen v abiaturaz elkarren artean r distantziara 8 irudian erakutsi bezala. Bi partikulen artean in dar magnetiko eta elektrikoak egongo dira. Konparatu ditzagun elkarren artean.



Irudia 8: Suposa dezagun bi protoi ditugula kontrako noranzkoan higitzen v abiaduraz elkarren artean r distantziara. Bien artean indar elektriko eta magnetikoak egongo dira.

Bi protoien arteko indar elektrikoaren modulua

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

izango da. (28) ekuazioaren arabera eskuinerantz higitzen ari den protoiak beste protoia dagoen puntuan sortuko duen eremu magnetikoa

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv}{r^2} \hat{u}_z$$

izango da. Beraz, ezkererantz higitzen ari den partikularen gaineko indar magnetikoa

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB\hat{u}_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 v^2}{r^2} \hat{u}_y$$

da. Moduluen arteko zatidura hartzen badugu

$$\frac{F_E}{F_B} = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0 v^2}$$

dugu. Indarren arteko zatidurak dimentsiorik ez duenez, $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ abiadura bat izan behar da derrigor. Hain zuzen,

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 299792458 \text{ m/s} = c \quad (30)$$

argiaren abiadura da. Beraz, indar elektrikoaren eta magnetikoaren arteko zatidura

$$\frac{F_E}{F_B} = \frac{c^2}{v^2} \quad (31)$$

da, hau da, abiadura txikia denean indar magnetikoa askoz ahulagoa da indar elektrikoa baino.

4.2 Korrante elektriko batek sortzen duen eremu magnetikoa: Biot eta Savart-en legea

Korrante elektriko batean \vec{v}_d deriba abiaduraz higitzen ari diren kargadun partikulak ditugunez, korrante elektriko batek eremu magnetiko bat sortuko du. Har dezagun A sekzioa eta dl luzera infinitesimala duen ari eroalea, zeinek $\vec{J} = nq\vec{v}_d$ korrante-dentsitatea duen. Elementu inifinitesimal horretan higitzen ari diren partikula guztiek abiadura berdina dutenez, elementu inifinitesimalak sortuko duen $d\vec{B}$ eremu magnetiko inifinitesimala elementu horretan dauden partikula kopurua bider elementu batek sortzen duen eremua izango da. (28) ekuazioaren arabera beraz,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} (nAdl) \frac{q\vec{v}_d \times \hat{r}}{r^2}, \quad (32)$$

non n bolumen unitateko dugun partikula kopurua baiten. Korrante elektrikoia $I = JA$ dela eta $d\vec{l} = dl\vec{J}/J$ bektorea definituz,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (33)$$

Biot eta Savart-en legea lortzen dugu. Honek esaten digu I korrantea daraman $d\vec{l}$ luzerako elementu txikiak nolako eremua sortzen duen espazioko edozein $\vec{r} = r\hat{r}$ puntutan. Berriro ere, $d\vec{l}$ bektorearen modulua dl luzera infinitesimala da eta bere norabide eta noranzkoa \vec{J} korrante-dentsitatearen berdinak dira.

Biot eta Savarten legearen arabera, hari oso batek sortzen duen eremu magnetikoa kalkulatzeko (33) ekuazioa integratu beharko dugu hari osora:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (34)$$

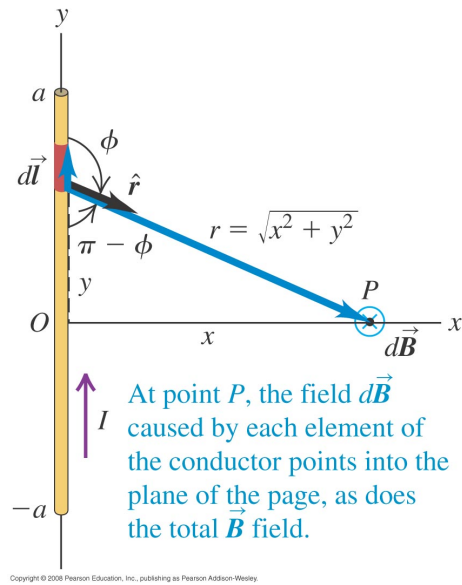
Adibidea:

Kalkula dezagun $2a$ luzerako eta I korrantea duen hariak sortzen duen eremu magnetikoa bere zentrotik x distantziara dagoen puntu batean. Horretarako Biot eta Savarten legea erabili beharko dugu, (33) ekuazioa. Har dezagun jatorritik y distantziara dagoen $d\vec{l}$ korrante elementua. Ikus dezagun honek sortzen duen $d\vec{B}$ eremu magnetiko infinitesimala. Horretarako, geure kasuan

$$\begin{aligned} d\vec{l} &= dy\hat{u}_y \\ \hat{r} &= \sin(\pi - \phi)\hat{u}_x - \cos(\pi - \phi)\hat{u}_y \\ d\vec{l} \times \hat{r} &= -\sin(\pi - \phi)dy\hat{u}_z = -\frac{xdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{u}_z \end{aligned}$$

moduan idatz daitezkeela erabiliko dugu. Beraz, elementu honek sortzen duen eremu infinitesimala

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{-xdy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{u}_z$$



Irudia 9: $2a$ luzerako eta I korronea duen hariak sortzen duen eremu magnetikoaren kalkulua.

da. Hau hari osora integratzeko y luzerarekiko integratu beharko dugu:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (-x\hat{u}_z) \int_{-a}^a \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (-x\hat{u}_z) \frac{2a}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x \sqrt{x^2 + a^2}} (-\hat{u}_z).\end{aligned}$$

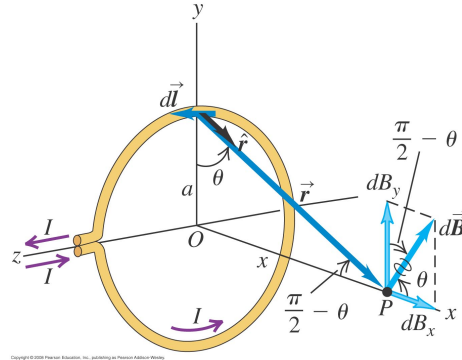
Eremuaren noranzkoak eskuin eskuko araua betetzen duela ikusten dugu, noski. Haria infinitoa dela suposatuz gero, eremu magnetikoaren modulua

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (35)$$

izango da, non x hariaren eta eremua jakin nahi dugun puntuaren arteko distantzia den.

Adibidea:

kalkula dezagun orain a erradioko eta I korronea duen espirak sortzen duen eremu magnetikoa bere ardatzeko edozein puntutan (ikusi 10 irudia). Biot eta Savarten legea erabiliko dugu horretarako. Hartu dezagun, irudian erakusten den bezala, espirako goikaldean dagoen korrone elementu infinitesimala. Or-



Irudia 10: a erradioko eta I korronea duen espirak sortzen duen eremu magnetikoaren kalkulua.

duan,

$$\begin{aligned} d\vec{l} &= dl\hat{u}_z \\ \hat{r} &= \sin\theta\hat{u}_x - \cos\theta\hat{u}_y \\ d\vec{l} \times \hat{r} &= dl \cos\theta\hat{u}_x + dl \sin\theta\hat{u}_y. \end{aligned}$$

Ikusten denez eremu magnetikoak osagai bat izango du x ardatzean eta beste bat y ardatzean. Hari osora integratzen dugunean eremu magnetiko totala kalkulatzeko, x ardatzeko osagaia soilik geldituko da, beste osagaia anulatuiko baita. Hots, espiraren kontrako aldean dagoen ekarpena hartuz $d\vec{l} \times \hat{r} = dl \cos\theta\hat{u}_x - dl \sin\theta\hat{u}_y$ izango da, zeinek x ardatzeko osagaia ez dena anulatuiko duen. Honela, eremu totala

$$dB_x = \frac{\mu_0 I dl \cos\theta}{4\pi (x^2 + a^2)}$$

integratuz lortuko dugu, hau da,

$$\vec{B} = \int dB_x \hat{u}_x = \frac{\mu_0 I \cos\theta}{4\pi (x^2 + a^2)} \int dl \hat{u}_x = \frac{\mu_0 I \cos\theta}{4\pi (x^2 + a^2)} 2\pi a \hat{u}_x = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{u}_x,$$

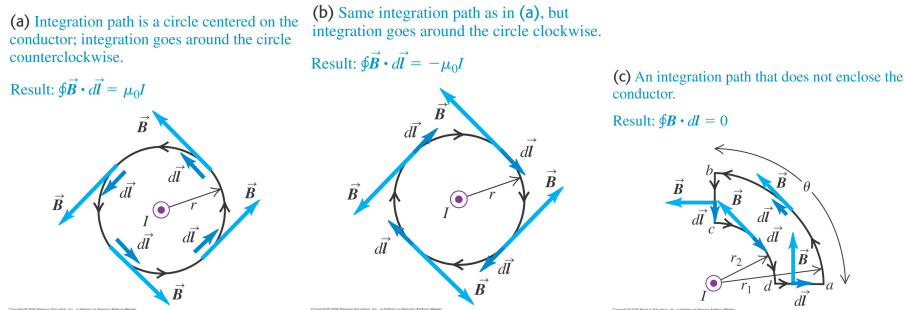
non $\cos\theta = a/\sqrt{x^2 + a^2}$ dela erabili dugun. Espira bakarra beharrean N espira bagenitu eremua

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{u}_x$$

litzake. Ikusten denez, eremu magnetikoa maximoa izango da espiraren zentroan, $x = 0$ denean, non

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2a} \hat{u}_x$$

balioa izango baituen.



Irudia 11: I korrontea daraman hari infinitoak sortzen duen eremuaren $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ lerro integrala integrazio-lerro desberdinak hartuz.

Adibidea:

Suposa dezagun L luzerako bi hari luze paralelo ditugula r distantziaz banatuta. Batek I_1 korrontea darama eta bigarrenak I_2 korrontea. Suposatuz $L \gg r$ dela, hariak sortzen duen eremua (35) ekuazioak ematen duela onartu dezakegu. Ekuazio hau erabiliz eta korronte bat eremu magnetikoan dagoenean (15) ekuazioak emandako indarra pairatzen duenez,

$$F_{12} = F_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} L$$

izango da 1. hariaren gainean 2. hariak sortuko duen indarra, zein 2. hariaren gainean 1. hariak sortuko duen indarra. Indar hauek ordea kontrako noranzkokoak izango dira, beraz, Newtonen 3. legea betez. Ordea, indarra erakarlea izango da bi korronteak noranzko berdinekoak badira eta aldaratzailea kontrako noranzkokoak badira.

4.3 Ampère-n legea

Orain arte korronte elektriko bat duen elementu batek sortzen duen eremu magnetikoa kalkulatzeko $I d\vec{l}$ korronte elementu infinitesimal batetik abiatu gara eta honek sortzen duen $d\vec{B}$ eremu infinitesimala kalkulatu dugu lehenik Biot eta Savarten legea erabiliz. Ondoren, elementu osora integral bat eginez lortu dugu zein den elementuak sortzen duen eremu magnetikoa. Elektrostatikaren ikusi genuen halako integralak ekidin daitezkeela simetria handia dagoenean problemaren Gauss-en legearen bitartez. Ikusiko dugun bezala, Ampère-n legeak asko erraztuko digu eremu magnetikoaren kalkulua simetria duten korronte elementuak ditugunean.

Lehenik, hartu dezagun hari infinito bat eta honek sortzen duen eremua (eremu-lerroak 11 irudian erakusten dira). Kalkulatu genuenez, haritik r dis-

tantziara eremuaren modulua

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (36)$$

izango da. Kalkula dezagun orain eremuaren

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (37)$$

lerro-integrala 11 irudiko lerro itxi desberdinak hartuz. Hemen $d\vec{l}$ aukeratutako lerroarekiko ukitzailea den bektorea da eta bere noranzkoak lerro integrala egiteko aukeratutako noranzkoaren arabera da. Lerro-integralean eremu magnetikoaren eta $d\vec{l}$ bektorearen arteko biderkadura eskalarra dugu. Egin dezagun kalkulua irudiko kasuetarako:

- a) Kasu honetan lerro-integrala egiteko lerro itxia zirkularra da eta integrala egiteko erloju-orratzen aurkako noranzkoa aukeratu dugu. Eremua eta $d\vec{l}$ paraleloak direnez lerro itxi osoan, eta eremuaren modulua berdina denez lerroko puntu guztietan,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl = B 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I. \quad (38)$$

- b) Kasu honetan a) kasuko lerro itxi zirkular berdina dugu, baina integrala egiteko erloju-orratzen noranzkoa aukeratu dugu. Eremua eta $d\vec{l}$ antiparaleloak direnez lerro itxi osoan, eta eremuaren modulua berdina denez lerroko puntu guztietan,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \oint B dl = -B \oint dl = -\mu_0 I. \quad (39)$$

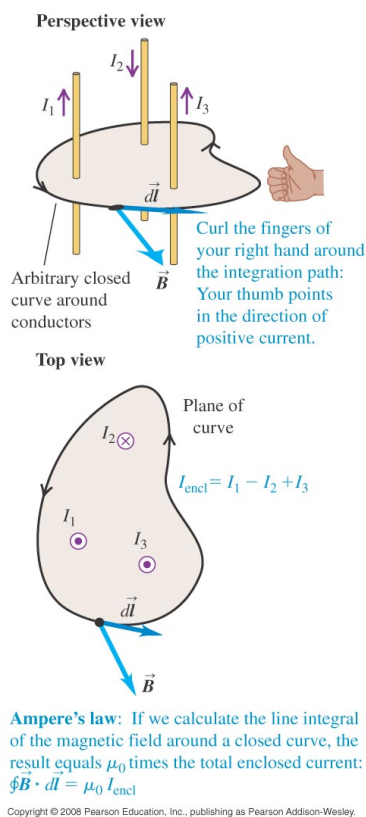
- c) Orain lerro itxi desberdin bat aukeratu dugu integrala egiteko. Kasu honetan integrala zatika egingo dugu:

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= B(r_1) \int_a^b dl - B(r_2) \int_c^d dl = B(r_1) \frac{\pi r_1}{2} - B(r_2) \frac{\pi r_2}{2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} \frac{\pi r_1}{2} - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} \frac{\pi r_2}{2} = 0. \end{aligned}$$

Dirudenez lerro-integralaren emaitza lerro itxiak inguratzen duen korrontearen arabera da, korrontea inguratzen badu integrala ez nulua da, baina korrontetik inguratzen ez badu nulua dela dirudi.

Ampèren legeak hori zehazten du hain zuzen: eremu magnetikoaren lerro itxi bateko integrala proportzionala da inguratzen duen I_{ing} korrontearerako:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{ing}. \quad (40)$$



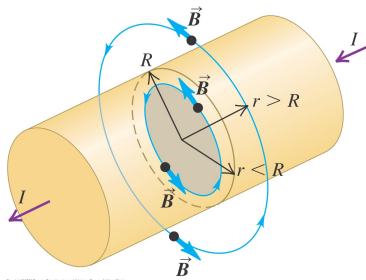
Irudia 12: Ampèren legea aplikatzeko inguratutako korronteen zeinua nola zehaztu behar den erakusten duen adibidea.

Kontua izan behar da lege hau aplikatzearakoan korronteen zeinuekin. Korronteen zeinuak eskuin eskuko arauak zehaztuko du lerro integral itxia egiteko aukeratutako noranzkoaren arabera. Adibide bat aurkezten da 12 irudian.

Ohar bezala aipatu behar da eremu elektrikoaren lerro integral bat hartzen dugunean lerro itxi batean, lerro integral hau beti nulua dela. Izan ere eremu elektrikoa potentzial elektrikoaren deribatua da. Eremu magnetikoaren kasuan lerro integrala ez-nulua izateak esan nahi du eremu magnetikoa ezin dugula idatziz funtzio baten gradiente bezala. Hau da de eremu elektriko eta magnetikoaren arteko desberdintasun nagusietako bat.

Adibidea: Zilindroa

Kalkulatu dezagun I korrontea duen eta korronte-dentsitate uniformearekin duen R erradioko zilindro eroaleak sortzen duen eremua (ikus 13 irudia). Kasu honetan, simetriaz badakigu eremu-lerroak zirkularrak izango direla, hau da, zilindroaren zentrotik r distantziara eremua berdina izango dela eta zirkunferen-



Irudia 13: R erradioko zilindro batek sortzen duen eremu magnetikoaren kalkulua.

tziarekiko ukitzalea irudian erakusten den bezala. Hortaz, eremua kalkulatzeko Ampèren legea erabiliz lerro itxi zirkularrak aukeratuko ditugu. Aukeratutako zirkunferentziaren r erradioa edozein delarik ere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = B2\pi r.$$

Ordea, zirkunferentziak inguratuko duen korronea desberdina izango da $r < R$ denean edo $r > R$ denean:

$$\begin{aligned} r < R & : I_{ing} = J\pi r^2 = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = I \frac{r^2}{R^2} \\ r > R & : I_{ing} = I, . \end{aligned}$$

Lerro integrala egiteko aukeratu dugun noranzkoak bermatzen du I korronea zenbaki positiboa izango dela. Honela, (40) ekuazioaren arabera, eremu magnetikoa

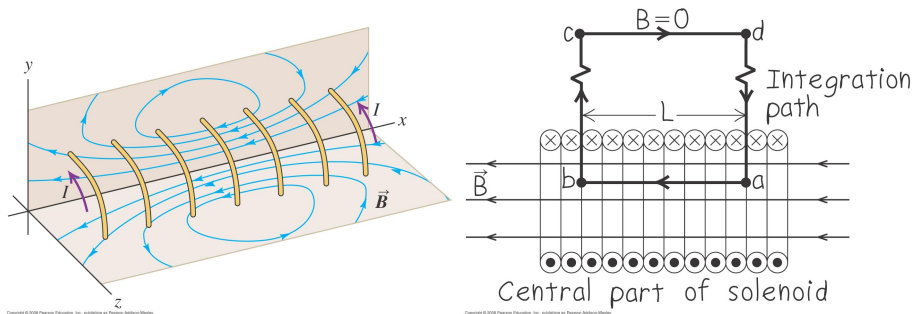
$$\begin{aligned} r < R & : B = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{r}{R^2} \\ r > R & : B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \end{aligned}$$

izango da.

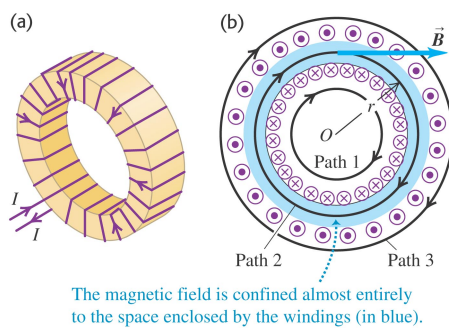
Adibidea: Solenoidea

Kalkulatu dezagun I korronea duen solenoide baten eremua. Solenoide bat elkarren aretan oso gertu dauden espira multzoa da. 14 irudian erakusten den bezala, solenoide batek eremu lerroak bere barnean harrapatzen ditu. Solenoide oso luzea denean onartu daiteke bere barnean soilik dugula eremua eta eremu-lerroak paraleloak direla solenoidearen ardatzarekiko. Kasu honetan 14 irudiko eskuin aldeko lerro itxia erabiliz kalkula dezakegu solenoidearen barneko eremu magnetikoa. Alde batetik

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL.$$



Irudia 14: Solenoide batek sortzen duen eremu magnetikoaren kalkulua.



The magnetic field is confined almost entirely to the space enclosed by the windings (in blue).

Irudia 15: Solenoide toroidal batek sortzen duen eremu magnetikoaren kalkulua.

Bestetik, eremu lerro horrek inguratuko duen korronea nLI izango da, non n luzera unitateko dauden espira kopurua baiten. Beraz, Ampèren legearen arabera, solenoide barneko eremua

$$B = \mu_0 n I$$

izango da. Solenoidearen ertzetan eremua txikitzen joango da balio honetatik.

Adibidea: Solenoide toroidala

Kalkulatu dezagun I korronea duen solenoide toroidal baten eremua. 14 irudian erakusten den bezala, solenoide toroidal batek ere eremu magnetikoa bere barnera mugatzen du. Solenoide toroidalaren barne-erradioa r_a bada eta kanpo-erradioa r_b , eremua soilik $r_a < r < r_b$ eskualdean izango dugu, non eremu-lerroak zirkularrak izango diren. Beraz, lerro itxi bezala zirkunferentzia bat hartzen badugu inguratzen duen korronea totala ez-nulua izango da soilik bere erradioa $r_a < r < r_b$ denean. Kasu honetan

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r$$

eta inguratuko duen korronea NI izango da, N espira kopuru totala izanik. Beraz, $r_a < r < r_b$ tartean

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NI}{r},$$

bestela $B = 0$.

Solenoida estua dela onartzen badugu, hau da, $r_b \sim r_a \sim r$ dela,

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NI}{r} = \mu_0 n I,$$

solenoida zuzen baten barnean dugun eremua hain zuzen ere.